

CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS QUE CARACTERIZAN LA FLUENCIA DE UN MATERIAL Y SUS INCERTIDUMBRES

Ariel E. Matusevich^{a,b}, Julio C. Massa^{a,c} y Reinaldo A. Mancini^b

^a *Facultad de C. E. F. y N., Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina, amatusevich@efn.uncor.edu, <http://www.efn.uncor.edu>*

^b *Laboratorio de Ensayos Mecánicos, Instituto Nacional de Tecnología Industrial, Centro Regional Córdoba, Av. Velez Sarsfield 1561, 5000 Córdoba, Argentina, rmancini@inti.gov.ar*

^c *Departamento de Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Río Cuarto, Ruta Nacional 36 Km. 601, 5800 Río Cuarto, Argentina, jmassa@efn.uncor.edu, <http://www.ing.unrc.edu.ar>*

Palabras clave: Ensayo de tracción, incertidumbre

Resumen. En la actualidad se requiere que los laboratorios de ensayo y calibración posean y apliquen procedimientos para la evaluación de la incertidumbre de medición. Si bien no se disponen de lineamientos específicos para la evaluación de las incertidumbres asociadas a los valores medidos en un ensayo de tracción, la práctica aconsejada es emplear la metodología general que brinda el documento de la ISO: "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement". La aplicación de esa metodología resulta sencilla para algunos de los parámetros típicamente informados en el ensayo, tales como la resistencia a la tracción, el porcentaje de alargamiento o la reducción porcentual de área. Sin embargo, la evaluación no resulta simple en el caso del límite convencional de fluencia. Dicho parámetro, que representa la forma más habitual de definir la fluencia de un material, se obtiene de la curva tensión-deformación resultante del ensayo, hallando la intersección entre la curva de ensayo y una recta paralela a la zona lineal de la misma. Para evaluar la incertidumbre en la determinación de este parámetro, se hace imprescindible reanalizar la curva obtenida en el ensayo mediante una herramienta computacional adecuada.

Se describen aquí, los diferentes parámetros que permiten caracterizar la fluencia de un material y se presenta una metodología computacional para el cálculo de los mismos y de sus incertidumbres. La metodología mencionada, dio origen a una herramienta computacional en el ambiente de programación Matlab[®] para el cálculo de los valores típicos en un ensayo de tracción y sus incertidumbres. Dicha herramienta, que se presenta en éste trabajo, se utiliza actualmente en el laboratorio de ensayos mecánicos del Instituto Nacional de Tecnología Industrial, Centro Regional Córdoba (INTI Córdoba).

1. NOMENCLATURA

En el presente trabajo se utilizan los siguientes símbolos:

A	Alargamiento porcentual de la probeta.
c_{x_i}	Coefficiente de sensibilidad asociado a la variable de entrada x_i .
e	Elongación ingenieril.
F_{eH}	Fuerza que corresponde al punto de fluencia superior R_{eH} .
F_{eL}	Fuerza que corresponde al punto de fluencia inferior R_{eL} .
F_m	Carga máxima registrada (corresponde a R_m).
F_p	Fuerza que corresponde al límite convencional de fluencia R_p .
F_t	Fuerza que corresponde al parámetro R_t .
k	Factor de cobertura.
L_e	Longitud inicial del extensómetro utilizado.
R_{eH}	Punto superior de fluencia.
R_{eL}	Punto inferior de fluencia.
R_m	Resistencia a la tracción.
R_p	Límite convencional de fluencia.
$R_{p0,2}$	Límite convencional de fluencia para una deformación permanente del 0,2 %.
R_t	Tensión para una deformación total especificada.
$R_{t0,5}$	Tensión para una deformación total especificada del 0,5 %.
s	Desviación estándar.
S_0	Sección transversal inicial de la probeta.
$u(x_i)$	Incertidumbre estándar de la variable de entrada x_i .
$u(x_i, x_j)$	Covarianza entre las variables x_i y x_j .
$u_c(f)$	Incertidumbre estándar combinada del mensurando f .
U	Incertidumbre expandida.
Z	Reducción porcentual del área de la probeta.
α	Fracción especificada de la longitud del extensómetro (i.e. 0,002 ó 0,005).
ε	Deformación ingenieril ($\varepsilon = e / L_e$).
σ	Tensión ingenieril.
ν_{x_i}	Grados de libertad asociado a la variable de entrada x_i .

2. INTRODUCCIÓN

Un ensayo de tracción consiste en someter a una probeta de dimensiones normalizadas o bien de tamaño completo, a una carga uniaxial de tracción que se incrementa continuamente hasta producir la rotura de la probeta. Se realiza mediante una máquina de ensayo que registra de manera simultánea los valores de carga y elongación correspondientes. De esos registros se obtienen ciertos parámetros que caracterizan las propiedades mecánicas del material ensayado, tales como la resistencia a la tracción (R_m), el límite convencional de fluencia (R_p), el alargamiento porcentual de rotura (A) y la reducción porcentual de área (Z). Abundante información

sobre este ensayo puede encontrarse en libros de resistencia de materiales, metalurgia física, etc. (Dieter, 1986). Sin lugar a dudas, se trata de uno de los ensayos destructivos más importantes.

Es importante que el resultado de toda medición o ensayo sea acompañado por un parámetro que caracterice la dispersión de los valores que pueden atribuirse al mensurando. Dicho parámetro se denomina incertidumbre de la medición y permite comparar de manera realista los resultados obtenidos con los valores de referencia dados por las normas o especificaciones, o bien con las mediciones de otros laboratorios. Actualmente es un requisito para los laboratorios de ensayo y calibración, aplicar procedimientos para la determinación de la incertidumbre de medición (IRAM 301, 2005).

En el caso del ensayo de tracción de materiales metálicos, las normas que lo rigen (ASTM E8-04, 2004; EN 10002-1, 2001; IRAM IAS U 500-102, 1987), no mencionan el cálculo de las incertidumbres asociados a los parámetros obtenidos, a excepción de (EN 10002-1, 2001) en su anexo J de carácter informativo. En dicho anexo se estiman las incertidumbres como porcentajes fijos de los valores medidos, mediante un “balance de errores”, basado en las tolerancias especificadas en las normas de ensayo y calibración. Los porcentajes estimados son: 2,6 % para la reducción porcentual de área Z , 2,3 % para el límite convencional de fluencia $R_{p0,2}$ y 1,6 % para los valores de R_m , y A .

En este trabajo se evalúan las incertidumbres de los parámetros del ensayo, siguiendo los lineamientos de la guía: “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement” (BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, 1993), conocida en forma abreviada como “La GUM”. Dicha guía, cuya aplicación es requerida por la mayoría de los organismos de acreditación, describe los métodos aceptados por la mayoría de los laboratorios para cuantificar en forma razonable la incertidumbre de medición.

La utilización de la metodología que brinda la GUM, resulta sencilla para los parámetros, A , Z y R_m . Sin embargo, no resulta simple en el caso del límite convencional de fluencia R_p . Recordar que el cálculo de dicho parámetro, implica ajustar mediante una recta la parte proporcional de la curva tensión vs. deformación y hallar el valor de la intersección de otra recta paralela a la primera con el tramo no lineal de la curva. Si se utiliza una máquina de ensayos moderna, los cálculos se realizan mediante un software específico de la máquina de ensayo y como consecuencia de esto, las técnicas de cálculo empleadas y los parámetros del ajuste, elementos esenciales para la evaluación de la incertidumbre, no se encuentran disponibles. Resulta por lo tanto indispensable reanalizar los datos experimentales producto del ensayo. Esta fue la razón principal que motivó a los autores a desarrollar una herramienta computacional en el ambiente Matlab[®], para reanalizar los datos resultantes de un ensayo y evaluar las incertidumbres correspondientes. Dicha herramienta se utiliza actualmente en el Laboratorio de Ensayos Mecánicos de INTI Córdoba (www.inti.gov.ar), acreditado por el Organismo Argentino de Acreditación (OAA).

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En una primera parte, se describen los parámetros comúnmente usados para caracterizar la fluencia de un material siguiendo la bibliografía clásica (Dieter, 1986). Luego se describen los métodos propuestos para el cálculo de dichos parámetros y la evaluación de sus incertidumbres. En una segunda parte, se describe la herramienta desarrollada para el cálculo de parámetros e incertidumbres en el ensayo de tracción y se analizan algunas curvas de ensayo típicas. Finalmente se exponen las conclusiones del trabajo.

3. FORMAS DE CARACTERIZAR LA FLUENCIA DE UN MATERIAL

La determinación de la tensión a partir de la cual comienza a observarse una deformación plástica, depende de la sensibilidad del instrumento utilizado para medir la deformación. En la mayoría de los metales, la transición entre el comportamiento elástico y el plástico resulta gradual y por lo tanto, el punto donde comienza la deformación plástica resulta difícil de definir con precisión.

Para estos casos, existen básicamente 3 criterios para definir el inicio de la región plástica: 1) el límite elástico (punto *B* Figura 1), que es la mayor tensión que un metal puede soportar sin presentar una deformación permanente al dejar de aplicar la carga; 2) el límite de proporcionalidad (punto *A* de la Figura 1), que es la tensión para la cual la curva tensión-deformación deja de ser lineal y 3) el límite convencional de fluencia R_p (punto *C* de la Figura 1), que es la tensión que corresponde a una deformación plástica especificada.

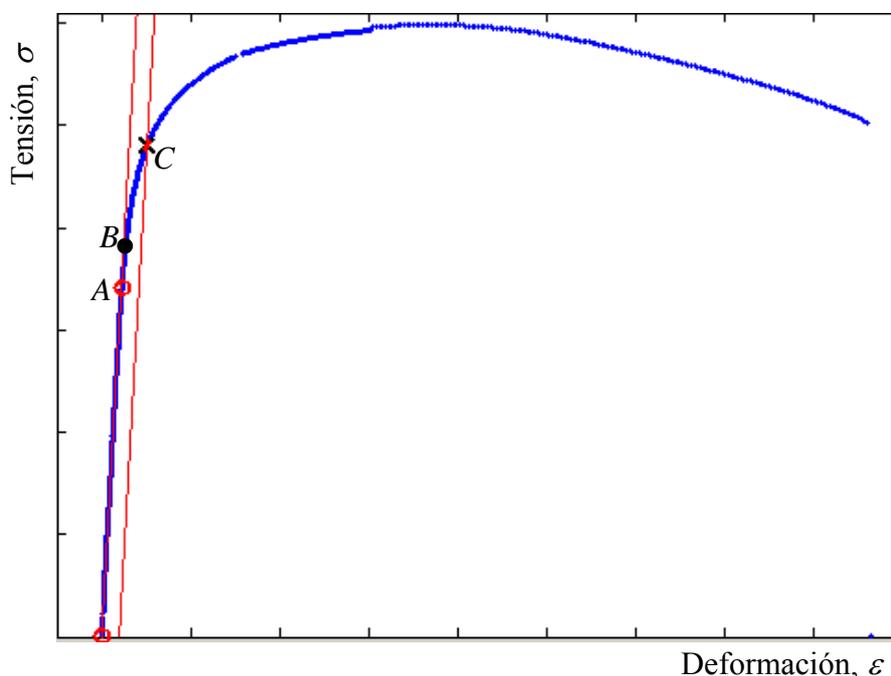


Figura 1: Curva típica con transición suave

Debido a las dificultades prácticas inherentes a la medición del límite de proporcionalidad y del límite elástico, se utiliza comúnmente el límite convencional de fluencia R_p en aplicaciones de ingeniería y especificaciones técnicas, debido a que este valor puede reproducirse más fácilmente en diferentes laboratorios.

Para ciertos materiales tales como el cobre blando o la fundición gris, no es posible definir en la curva tensión vs. deformación una zona lineal. En estos casos, es conveniente definir la tensión de fluencia R_t , como la tensión que corresponde a una deformación total especificada.

Existen otros casos donde la transición entre la zona elástica y la zona plástica está bien definida. Se puede distinguir el fenómeno de fluencia, cuando se alcanza un punto donde la deformación plástica ocurre sin incremento de la carga (ver Figura 2). La tensión que corresponde a dicho punto se denomina límite de fluencia (IRAM IAS U 500-102, 1987). Si la carga no permanece constante pero fluctúa levemente entre ciertos valores, el fenómeno se denomina fluencia discontinua (Figura 3) y se presenta comúnmente en aceros de bajo carbono en estado recocido.

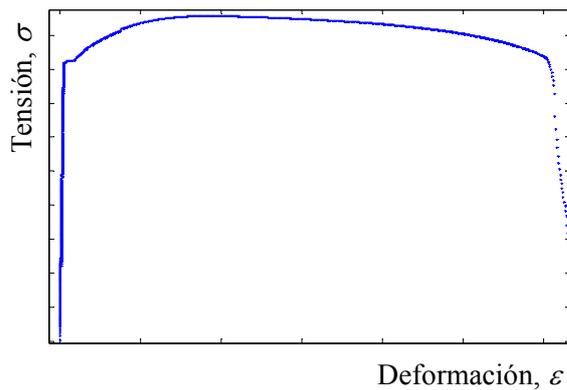


Figura 2: Fenómeno de fluencia

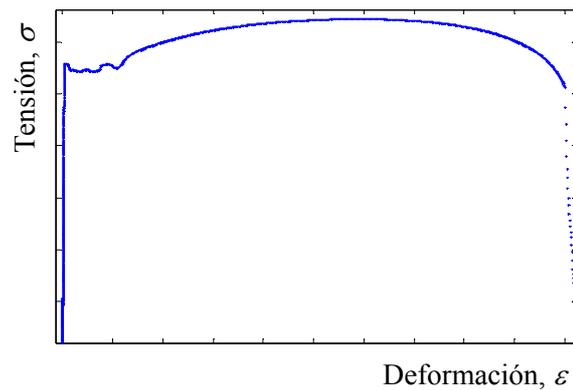


Figura 3: Fluencia discontinua

En presencia de fluencia discontinua, deben determinarse dos parámetros (ver Figura 4): el punto de fluencia superior (R_{eH}) que es el valor de la tensión en el primer pico registrado y el punto de fluencia inferior (R_{eL}) que corresponde a la tensión mínima registrada durante el fenómeno de fluencia discontinua. En aceros donde se presenta éste fenómeno, se utiliza el punto fluencia inferior R_{eL} para caracterizar la fluencia. Esto se debe a que la medición del punto de fluencia superior R_{eH} es extremadamente sensible a la alineación entre la probeta y la aplicación de la carga (Han, 1992).

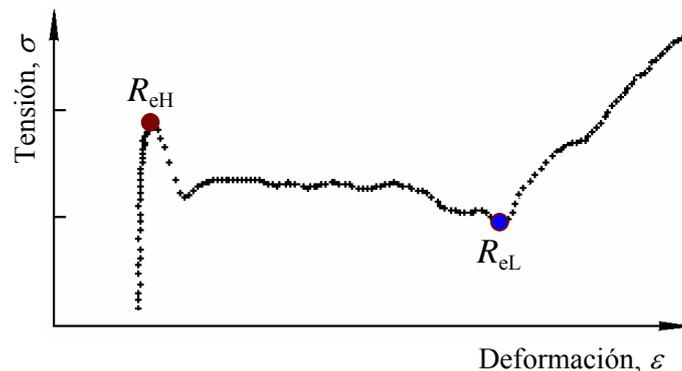


Figura 4: Puntos de fluencia superior e inferior

En esta sección se presentan procedimientos de cálculo para la determinación de los puntos de fluencia superior R_{eH} e inferior R_{eL} , el límite convencional de fluencia R_p y la tensión R_t que corresponde a una deformación total especificada. Dichos parámetros son los más utilizados para caracterizar la fluencia de un material.

3.1 Caso de fluencia discontinua - Puntos de fluencia superior e inferior

En presencia de fluencia discontinua, deben determinarse dos tensiones, el punto superior de fluencia (R_{eH}) y el punto inferior de fluencia (R_{eL}):

$$R_{eH} = \frac{F_{eH}}{S_0} \quad R_{eL} = \frac{F_{eL}}{S_0} \quad (1)$$

donde S_0 es el área inicial de la probeta y F_{eH} , F_{eL} son las cargas asociadas a dichas tensiones. En esta sección se describe el procedimiento propuesto para determinar esas cargas.

Si bien el número de puntos experimentales registrados en un ensayo depende de la velocidad de deformación y de la frecuencia de adquisición de datos seleccionada, en general las máquinas modernas registran típicamente entre mil y dos mil valores de carga y elongación.

Dichos puntos experimentales poseen dispersión, por lo que su tratamiento debe basarse en fundamentos estadísticos sólidos. De manera “informal” se habla de la “curva” carga vs. elongación, pero en realidad se tienen registros de dos series temporales (e_i, F_i) que debido a la aleatoriedad no son monótonas crecientes ni aún en el período lineal.

Para determinar la carga correspondiente al punto de fluencia superior, se inspeccionan los puntos experimentales de la curva de ensayo con la finalidad de detectar un descenso (estadísticamente significativo) de la carga en correspondencia con un aumento (estadísticamente significativo) de la elongación. Se propone utilizar el siguiente criterio:

Se avanza inspeccionando puntos en orden creciente hasta llegar al punto de orden j (e_j, F_j) donde se cumple simultáneamente que:

$$e_j - e_M > \Delta e \quad F_M - F_j > \Delta F \quad (2)$$

donde F_M es la mayor de todas las cargas de orden menor a j y e_M es su correspondiente elongación. Los valores de Δe y ΔF se deben determinar de manera de garantizar en términos estadísticos que se cumplen estrictamente y simultáneamente las desigualdades con un nivel de confianza prefijado.

$$\Delta_e = k_e u(e_j - e_M) \quad \Delta_F = k_F u(F_M - F_j) \quad (3)$$

donde k_e y k_F son factores de cobertura (multiplicadores de confianza) que dependen del nivel de confianza adoptado para la prueba de las hipótesis simultáneas de la ecuación (2).

Como la varianza de la diferencia de dos variables aleatorias es igual a la suma de las varianzas, la incertidumbre (raíz cuadrada de la varianza) de la diferencia de dos elongaciones resulta:

$$u(e_j - e_M) = \sqrt{2} u_{EXT} \quad (4)$$

donde u_{EXT} es la incertidumbre del extensómetro utilizado en el ensayo. Similarmente se tiene:

$$u(F_M - F_j) = \sqrt{2} u_{CEL} \quad (5)$$

donde u_{CEL} es la incertidumbre de la celda de carga utilizada en el ensayo.

En este trabajo se adoptó un nivel de confianza del 95 % para la prueba de hipótesis de las dos desigualdades que se deben satisfacer en forma simultánea, en consecuencia:

$$(1 - p_e)(1 - p_F) = 0,95 \quad (6)$$

donde p_e es la probabilidad de que la desigualdad referida a la diferencia de elongaciones se cumpla cuando es falsa y similarmente para p_F . Adoptando valores iguales para p_e y p_F , y reemplazando en la ecuación (6) se obtiene una ecuación de segundo grado que resuelta da:

$$p_e = p_F = p \quad \rightarrow \quad (1 - p)(1 - p) = 0,95 \quad \rightarrow \quad p = 0,02566 \quad (7)$$

El valor del factor de cobertura requerido ($k_e = k_F = k$) se obtiene de la tabla de distribución normal a una sola cola y resulta $k = 1,95$. En consecuencia las ecuaciones (3) se tornan:

$$\Delta_e = 1,95 \sqrt{2} u_{EXT} = 2,76 u_{EXT} \quad \Delta_F = 1,95 \sqrt{2} u_{CEL} = 2,76 u_{CEL} \quad (8)$$

Cuando se cumplen las dos desigualdades se tiene:

$$F_{eH} = F_M \quad (9)$$

A continuación se inspecciona el intervalo que va desde F_j hasta la carga máxima alcanzada en el ensayo (F_m) para determinar la carga asociada al límite inferior de fluencia:

$$F_{eL} = \text{menor valor del intervalo } [F_j, F_m] \quad (10)$$

IV. Cuando el punto de rotura R está debajo de la recta II , se puede calcular la intersección entre la curva experimental y la recta II como se describe a continuación.

Se inspeccionan los puntos experimentales para valores crecientes de elongación hasta encontrar el primer punto debajo de la curva II y se lo denomina punto $B = (e_B, F_B)$:

$$F_B < b_2 + m_1 e_B \quad (13)$$

Al punto inmediato anterior se lo denomina punto $A = (e_A, F_A)$. El punto de intersección de la recta II con la curva experimental se puede encontrar en forma aproximada reemplazando dicha curva por la recta que une los puntos experimentales (aleatorios) A y B . Para mejorar la precisión de la recta \overline{AB} se ajusta una recta de mínimos cuadrados ponderados (WTLS) que incluye varios puntos próximos a izquierda de A y a derecha de B que llamaremos recta III ($F = b_3 + m_3 e$). El número de puntos, n , considerados para definir la recta III se elige de modo de tener el mejor ajuste lineal, siendo $n \geq 6$.

Igualando las ecuaciones de las rectas II y III se obtiene el alargamiento " e_p " que corresponde a la intersección:

$$b_2 + m_1 e_p = b_3 + m_3 e_p \quad \rightarrow \quad e_p = \frac{b_3 - b_2}{m_1 - m_3} \quad (14)$$

Finalmente, utilizando e_p y el valor b_2 dado en (12), se obtiene F_p :

$$F_p = \frac{m_1 b_3 - m_3 b_1 + \alpha m_1 m_3 L_e}{m_1 - m_3} \quad (15)$$

Notar que en la determinación de F_p intervienen 5 parámetros (L_e, b_1, b_3, m_1, m_3).

2.3 Tensión para una deformación total especificada

La tensión que corresponde a una deformación total especificada está dada por la siguiente expresión:

$$R_t = \frac{F_t}{S_0} \quad (16)$$

donde la carga F_t resulta de la intersección entre la curva de ensayo y una recta vertical que corta el eje de abscisas en la elongación especificada (típicamente 0,5 %).

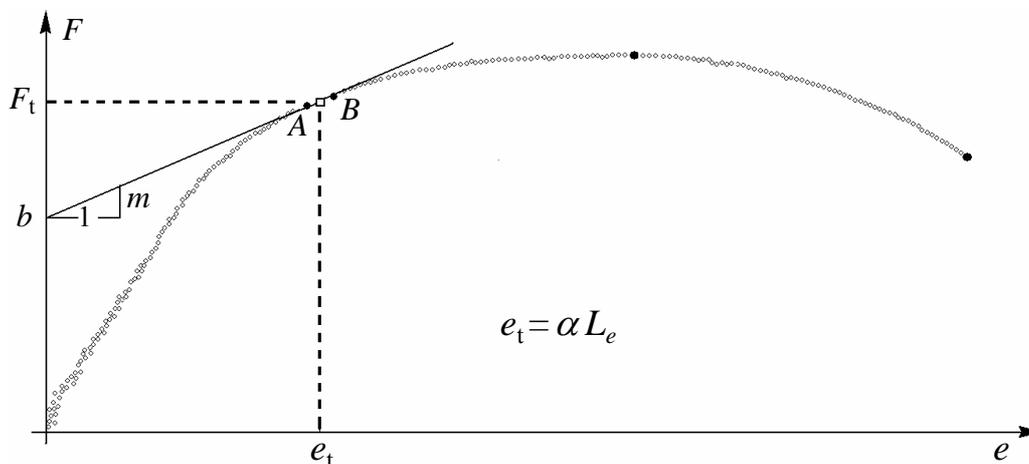


Figura 6: Esquema para determinar la carga F_t correspondiente al parámetro R_t

Para el cálculo de F_t se utiliza un razonamiento similar al empleado para la determinación de la fuerza F_p asociada al límite convencional de fluencia. En este caso la metodología resulta caso más sencilla e involucra los siguientes pasos:

- I. Si se dispone de tablas de corrección para el extensómetro y la celda de carga utilizados, se corrigen los valores de carga y elongación de la curva de ensayo.
- II. Si $e_t = \alpha L_e$, es la elongación total especificada, se buscan dos puntos experimentales $A = (e_A, F_A)$ y $B = (e_B, F_B)$, tales que $e_B > e_t$ y $e_A < e_t$ (ver Figura 6). La intersección entre la curva experimental y la recta vertical que corta al eje de abscisas en e_t , puede hallarse en forma aproximada interpolando linealmente entre los puntos A y B , para $e = e_t$. Para mejorar esta aproximación, se ajusta una recta de mínimos cuadrados ponderados (WTLS) de parámetros b y m que incluye varios puntos próximos a izquierda de A y a derecha de B , por lo tanto,

$$F_t = b + m e_t = b + m \alpha L_e \quad (17)$$

y en consecuencia en la determinación de F_t intervienen solo 3 parámetros: L_e , b y m .

3. EVALUACIÓN DE INCERTIDUMBRES

Al final del trabajo se encuentran los apéndices A y B donde se listan los conceptos que se consideran más relevantes en cuanto a la determinación de las incertidumbres de medición. Haciendo uso de esos conceptos, se describe en esta sección la evaluación de las incertidumbres asociadas a los parámetros R_{eH} , R_{eL} , R_p y R_t . Para cada uno de estos parámetros, se identifican y evalúan las diferentes fuentes de incertidumbre que permiten obtener la incertidumbre estándar combinada correspondiente.

Los parámetros R_{eH} , R_{eL} , R_p y R_t son tensiones referidas a la sección inicial de la probeta S_0 y por lo tanto se calculan mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_i = \frac{F_i}{S_0} \quad (18)$$

donde σ_i es una tensión genérica (que puede ser R_p , R_t , R_{eH} o R_{eL}) y F_i es la carga que corresponde a dicha tensión. Se consideran por lo tanto, fuentes de incertidumbre asociadas a la medición de la carga y fuentes de incertidumbre relacionadas con la determinación del área de la sección transversal de la probeta.

Para el cálculo de la incertidumbre estándar combinada $u_c(\sigma_i)$, se aplica la ecuación (36) del Apéndice A, teniendo en cuenta que en este caso las variables F_i y S_0 no se encuentran correlacionadas:

$$u_c(\sigma_i) = \sqrt{\left[\frac{\partial \sigma_i}{\partial F} u(F_i) \right]^2 + \left[\frac{\partial \sigma_i}{\partial S_0} u(S_0) \right]^2} = \sqrt{\left[\frac{1}{S_0} u(F_i) \right]^2 + \left[\frac{-F_i}{S_0^2} u(S_0) \right]^2} \quad (19)$$

donde $u(F_i)$ y $u(S_0)$ son las incertidumbres estándar de las mediciones de F_i y S_0 .

En lo referente a los grados de libertad de $u_c(\sigma_i)$, se utiliza la fórmula de Welch-Satterthwaite [ecuación (39) del Apéndice A]:

$$\nu_{\sigma_i} = \frac{[u_c(\sigma_i)]^4}{\left[\frac{\partial \sigma_i}{\partial F} u(F_i) \right]^4 / \nu_{F_i} + \left[\frac{\partial \sigma_i}{\partial S_0} u(S_0) \right]^4 / \nu_{S_0}} \quad (20)$$

A continuación se presentan procedimientos para evaluar las incertidumbres que corresponden a S_0 y a las cargas F_{eH} , F_{eL} , F_p y F_t asociadas a los parámetros R_{eH} , R_{eL} , R_p y R_t respectivamente. También se indican en cada caso, los grados de libertad efectivos que permiten determinar el factor de cobertura requerido para un nivel de confianza dado.

3.1 Incertidumbre en la medición de la sección transversal de la probeta

El proceso de medición del área de la sección transversal de una probeta, implica medir ciertas dimensiones de la misma utilizando un instrumento de medición apropiado y en base a estas medidas, efectuar el cálculo del área. Existen fuentes de incertidumbre de carácter aleatorio asociadas a la medición de los parámetros de la probeta y componentes sistemáticas provenientes de la calibración de los instrumentos utilizados. En general el cálculo del área y su correspondiente incertidumbre implica:

- I.** Encontrar la relación matemática que vincula las cantidades de entrada estimadas y el área S_0 (mensurando):

$$S_0 = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (21)$$

Por ejemplo, si trata del área de una sección rectangular, las cantidades de entrada estimadas son: el ancho de la sección b y el espesor t . La relación funcional que vincula las variables de entrada con el mensurando es: $S_0 = bt$.

- II.** Obtener los coeficientes de sensibilidad asociados a cada variable de entrada a partir de la expresión (21):

$$c_{x_1} = \frac{\partial S_0}{\partial x_1}, \quad c_{x_2} = \frac{\partial S_0}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad c_{x_m} = \frac{\partial S_0}{\partial x_m} \quad (22)$$

- III.** Calcular estimadores de las cantidades de entrada, computar el área según la expresión (21) y obtener la incertidumbre estándar combinada de la medición:

$$u_{S_0} = \sqrt{[c_{x_1} u(x_1)]^2 + \dots + [c_{x_m} u(x_m)]^2} \quad (23)$$

donde los valores $u(x_i)$ son las incertidumbres asociadas a las cantidades de entrada estimadas. La estimación de dichos valores y sus correspondientes incertidumbres, implica:

- a.** Efectuar n mediciones de cada una de las m cantidades x_i (con $n \geq 3$), luego calcular el valor medio de x_i y su desviación estándar s (Maiztegui, 2000):

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{i_k} \quad s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{i_k} - \bar{x}_i)^2} \quad (24)$$

- b.** Calcular la desviación estándar del promedio,

$$s(\bar{x}_i) = t \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} \quad (25)$$

utilizando el factor t de Student que corresponde a un nivel de confianza de 68.27%.

- c.** En base al certificado de calibración del instrumento utilizado para medir la cantidad de entrada x_i , obtener la incertidumbre estándar de calibración del instrumento:

$$u_{CAL} = \frac{U_{CAL}}{k} \quad (26)$$

donde U_{CAL} es la incertidumbre expandida resultante de la calibración y k es el factor de cobertura utilizado.

Luego, expresar el error de indicación del instrumento de medición como una incertidumbre estándar, asumiendo una distribución de probabilidad uniforme:

$$u_{IND} = \frac{e_{IND}}{\sqrt{3}} \quad (27)$$

d. Calcular la incertidumbre combinada en la medición de x_i :

$$u_c(x_i) = \sqrt{s(\bar{x}_i) + (u_{CAL})^2 + (u_{IND})^2} \quad (28)$$

e. Calcular los grados de libertad efectivos en la medición de x_i (ecuación (39) del Apéndice A):

$$\nu_{x_i} = [u_c(x_i)]^4 / \left\{ [s(\bar{x}_i)]^4 / (n-1) \right\} \quad (29)$$

IV. Calcular los grados de libertad efectivos de la medición del área usando la expresión ecuación (39) del Apéndice A:

$$\nu_{S_0} = \frac{[u(S_0)]^4}{[c_{x_1} u(x_1)]^4 / \nu_{x_1} + [c_{x_2} u(x_2)]^4 / \nu_{x_2} + \dots + [c_{x_m} u(x_m)]^4 / \nu_{x_m}} \quad (30)$$

3.2 Incertidumbre estándar en la medición de las cargas F_{eH} y F_{eL}

Las fuerzas F_{eH} y F_{eL} son medidas en forma directa mediante una celda de carga. La incertidumbre expandida en la medición de fuerzas está tabulada para distintos rangos de fuerzas, en el certificado de calibración de la celda de carga utilizada en el ensayo. Por lo tanto la incertidumbre estándar resulta:

$$u_{CEL} = \frac{U_{CEL}}{k_{CEL}} \quad \nu_{CEL} = \infty \quad (31)$$

donde U_{CEL} es la incertidumbre expandida de calibración de la celda de carga y k_{CEL} es el factor de cobertura utilizado en el informe de calibración.

3.3 Incertidumbre combinada en la medición de la carga F_p

Una metodología para evaluar la incertidumbre en la medición de F_p , puede encontrarse en el trabajo de Gabauer (2000). Dicho procedimiento ignora la correlación entre la pendiente y la ordenada al origen de la recta que describe la parte lineal de la curva de ensayo y además no tiene en cuenta la incertidumbre asociada al ajuste de la curva en las proximidades de la carga de fluencia F_p . La forma de cálculo que se presenta a continuación contempla ambos aspectos.

La carga F_p que corresponde al límite convencional de fluencia R_p , es una función de cinco variables aleatorias [ecuación (15)]. Se consideran como fuentes de incertidumbre, las asociadas a: (1) la determinación de los parámetros de la recta que ajusta la parte lineal de curva del ensayo (recta I), (2) la longitud inicial del extensómetro (L_e), (3) los parámetros de la recta que ajusta la tangente a la curva experimental (recta III) y (4) la calibración de los instrumentos utilizados.

Existen fuentes de incertidumbre que dependen del material a ensayar, pero no son tenidas en cuenta en este trabajo. Estimar dichas contribuciones requiere un conocimiento previo de la respuesta del material a la velocidad de deformación utilizada en el ensayo, lo que usualmente

no es posible. En relación a la influencia de la temperatura, su efecto puede despreciarse para ensayos realizados a temperatura ambiente (EN 10002-1, 2001).

Para el cálculo de la incertidumbre estándar combinada de F_p , se utiliza la ecuación (36) del Apéndice A y los grados de libertad efectivos se aproximan mediante la ecuación (41) del mismo apéndice. Se tienen en cuenta en este caso, la correlación entre la pendiente y la ordenada al origen de la recta I a través de la covarianza $u(b_1, m_1)$ y la correlación en la recta III mediante la covarianza $u(b_3, m_3)$.

La incertidumbre de F_p resulta:

$$u(F_p) = \sqrt{\begin{aligned} & [c_{b_1} u(b_1)]^2 + [c_{m_1} u(m_1)]^2 + [c_{b_3} u(b_3)]^2 + [c_{m_3} u(m_3)]^2 + \\ & + [c_{L_e} u(L_e)]^2 + 2c_{b_1} c_{m_1} u(b_1, m_1) + 2c_{b_3} c_{m_3} u(b_3, m_3) + [u_{CEL}]^2 \end{aligned}} \quad (32)$$

donde el último término de ésta ecuación tiene en cuenta la incertidumbre de calibración de la celda de carga definido en la ecuación (31).

A continuación se estiman cada una de la incertidumbres parciales indicadas en (32) indicando también los grados de libertad correspondientes.

Incertidumbre estándar de los coeficientes de las rectas de regresión

Los parámetros de las rectas II y III se calculan mediante el algoritmo WTLS, propuesto por Krystek y Antón, (2007). Siguiendo dicho trabajo se calculan las varianzas y las covarianzas de los parámetros de ambos ajustes.

Si n_{II} y n_{III} son las cantidades de puntos experimentales utilizados para los ajustes de las rectas II y III, los grados de libertad asociados a los parámetros de dichas rectas son $(n_{II} - 2)$ y $(n_{III} - 2)$ respectivamente.

Incertidumbre estándar de la longitud inicial del extensómetro

La incertidumbre de la longitud inicial del extensómetro $u(L_e)$ puede estimarse asumiendo que la distribución de las mediciones de la longitud es normal y que el 95,45% de las mismas se encuentra dentro de un intervalo igual al 1% de L_e (± 2 desviaciones estándar de la media):

$$u(L_e) = (0,001 L_e) / 4 \quad \nu_{L_e} = \infty \quad (33)$$

3.3 Incertidumbre combinada en la medición de la carga F_t

La carga que F_t está dada por la ecuación (17), por lo tanto F_t es función de los parámetros b y m de la recta de ajuste y de la longitud L_e del extensómetro. Al igual que en el caso de la fuerza F_p , se utiliza la ecuación (36) del Apéndice A para determinar la incertidumbre estándar combinada y la ecuación (41) del mismo apéndice para obtener una aproximación de los grados de libertad efectivos.

La incertidumbre de F_t resulta:

$$u(F_t) = \sqrt{\begin{aligned} & [c_b u(b)]^2 + [c_m u(m)]^2 + [c_{L_e} u(L_e)]^2 + 2c_b c_m u(b, m) + [u_{CEL}]^2 \end{aligned}} \quad (34)$$

La evaluación de las diferentes incertidumbres individuales indicadas en (34) es análoga al caso de la carga F_p presentado en la sección 3.2.

4. HERRAMIENTA COMPUTACIONAL

En esta sección se describen las características principales del programa INcerTI, desarrollado en el ambiente programación Matlab[®], para el cálculo de los parámetros de un ensayo de tracción y sus incertidumbres asociadas. Se trata de una aplicación autónoma creada para la plataforma Windows[®] que no precisa de la ejecución de Matlab[®] para su funcionamiento. Se maneja a través de una interfaz gráfica, como se puede apreciar en la Figura 7.

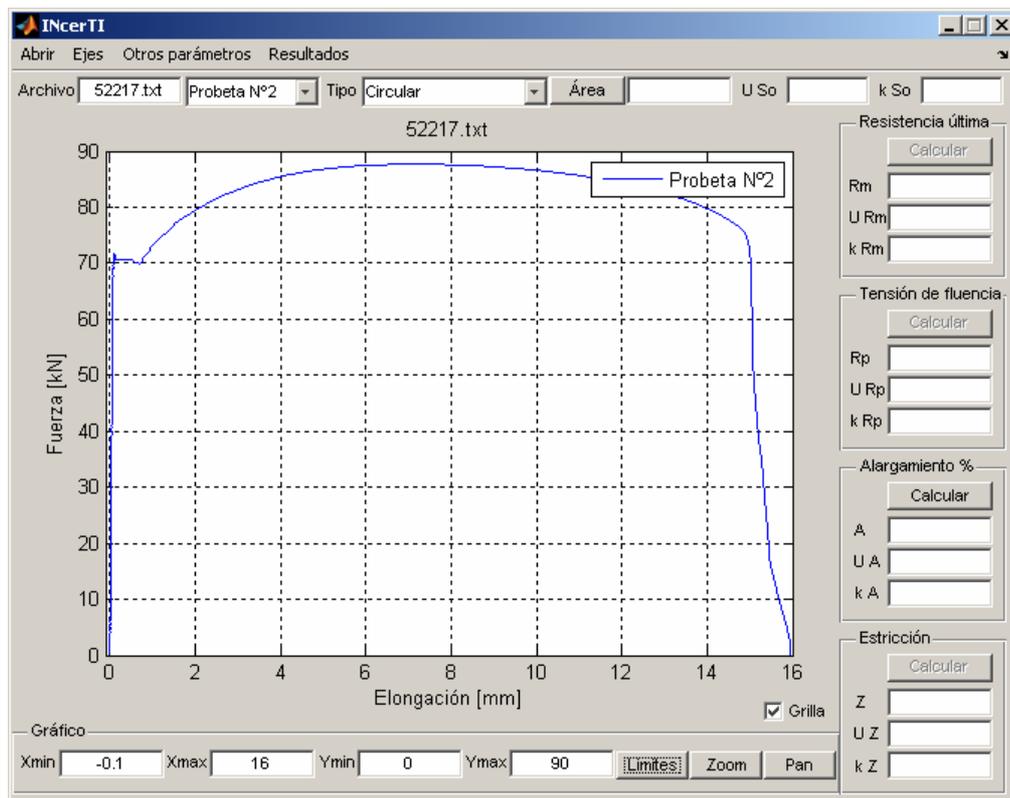


Figura 7: Pantalla principal de la interfaz gráfica del programa INcerTI

Con este software es posible calcular los siguientes parámetros del ensayo: (1) la resistencia a la tracción, (2) los puntos de fluencia superior e inferior (si existieran), (3) la tensión para una deformación total especificada, (4) el alargamiento porcentual de la probeta, (5) la reducción de área porcentual (estricción), (6) la energía de deformación por unidad de volumen y (7) el exponente n de endurecimiento por deformación.

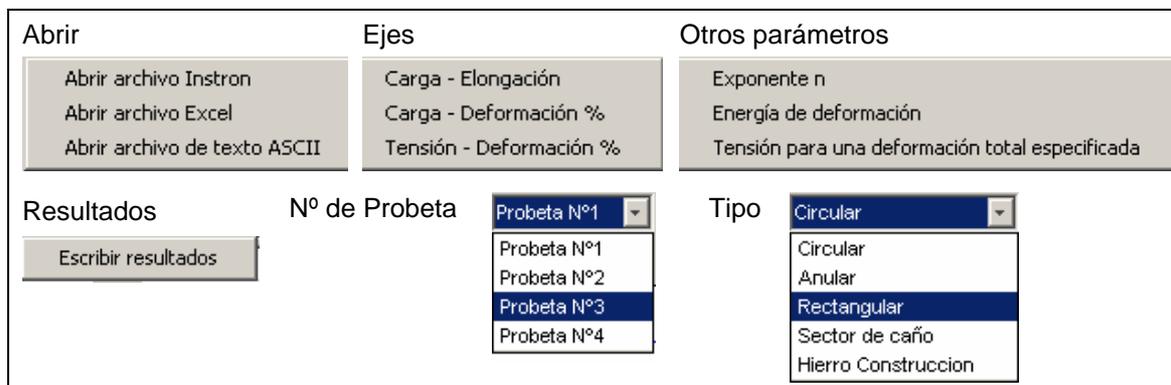


Figura 8: Menús emergentes del programa INcerTI

La estimación de incertidumbres efectuada mediante esta herramienta, se realiza en base a un nivel de confianza del 95,45 %. En lo referente a las unidades utilizadas, se usa el milímetro para las longitudes, el kilo-Newton (kN) para las cargas y el Mega Pascal (MPa) para las tensiones.

4.1 Carga de datos

El programa tiene la capacidad de leer archivos de formato ASCII, específicos de la máquina Instron[®] 4486 que utiliza el laboratorio de ensayos mecánicos de INTI Córdoba. Estos archivos pueden contener los registros carga-elongación de un único ensayo o bien de un lote de probetas. También es posible reanalizar los datos de un ensayo realizado con otro equipamiento (ver el Menú “Abrir” en la Figura 8). Para ello, el usuario debe confeccionar un archivo Excel[®] o ASCII que posea dos columnas con los registros del ensayo.

Una vez cargado el archivo a analizar, se grafica en la pantalla principal la curva carga versus elongación resultante. El gráfico puede examinarse en detalle mediante las funciones “Zoom”, “Pan” y “Límites” de la barra de herramientas “Gráfico”, que se encuentra en la parte inferior de la pantalla (ver Figura 7). También puede cambiarse la configuración de los ejes mediante el menú “Ejes” (ver Figura 8). Estas herramientas permiten al operador ampliar ciertas zonas, detectar posibles anomalías del ensayo e interpretar los resultados correctamente.

4.2 Área de la sección transversal

Se consideran probetas maquinadas del tipo circular, anular, rectangular y probetas obtenidas de tubos. También se pueden analizar tubos y hierros de construcción sin maquinar. El usuario debe entrar el tipo de probeta ensayada a través de un menú emergente (ver el menú “Tipo” en la Figura 8).

Seleccionando, por ejemplo, una sección del tipo circular, al presionar el botón “Área” en la pantalla principal (ver Figura 7) se abre la ventana 1 (ver Figura 3) donde el operador ingresa el número de mediciones efectuadas. Al presionar el botón “OK” se abre la ventana 2 para ingresar los valores de las mediciones realizadas. Finalmente en la ventana 3, se introducen los datos de calibración del instrumento de medición utilizado. Los resultados del cálculo, que incluyen el valor del área de la sección transversal de la probeta, la incertidumbre expandida de la medición y su factor de cobertura, se escriben en la parte superior derecha de la pantalla principal del programa (ver Figura 7).

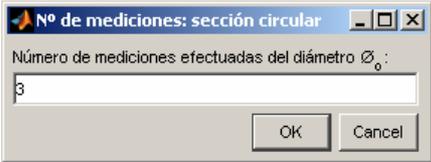
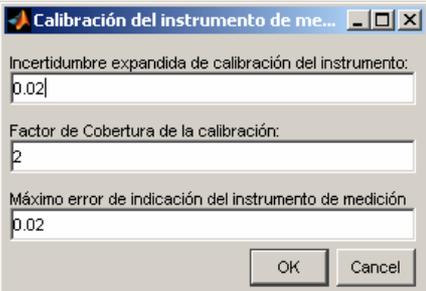
Ventana 1	Ventana 2	Ventana 3
		

Figura 9: Ingreso de datos del área de la sección de la probeta y del instrumento utilizado

4.3 Cálculo del límite convencional de fluencia R_p

Para determinar el límite convencional de fluencia R_p se presiona el botón “Calcular” del panel “Tensión de fluencia” que se habilita una vez calculada el área de la sección transversal de la probeta. Luego, el operador ingresa en una pantalla el valor de L_e y un porcentaje de dicha longitud, usualmente de 0,2 ó 0,5 % para los valores típicos de $R_{p0,2}$ y $R_{p0,5}$ (ASTM E8-04, 2004). Acto seguido, mediante ventanas de búsqueda, el usuario selecciona los archivos que contienen los datos de calibración del extensómetro y de la celda de carga utilizada en el ensayo.

Los resultados, que corresponden al valor del límite convencional de fluencia, su incertidumbre expandida y el factor de cobertura, se escriben en los cuadros de texto de la ventana principal. También se muestra sobre la curva del ensayo, la recta que ajusta la parte proporcional del gráfico (recta I), la paralela correspondiente (recta II) y su intersección con la zona no lineal.

Si se analiza una curva como la que se muestra en la Figura 7, donde se presenta el fenómeno de fluencia discontinua, el software detecta en forma automática los puntos de fluencia superior e inferior. Estos resultados adicionales se indican en otra pantalla, como se aprecia en la Figura 10. Notar que la diferencia entre los valores de R_{eL} y $R_{p0,2}$ supera el resultado de la incertidumbre.

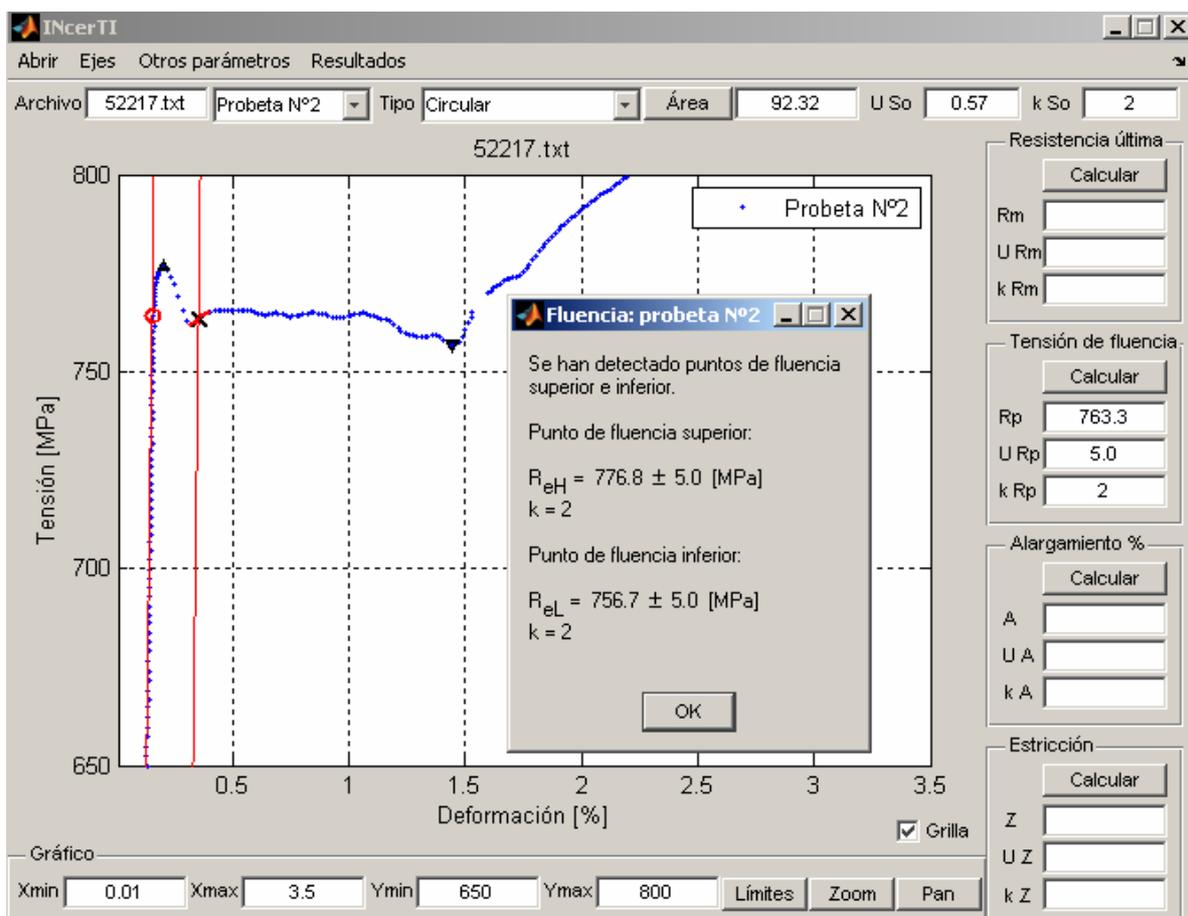


Figura 10: Curva de ensayo donde se presenta fluencia discontinua

En las Figuras 11 y 12 se muestran los resultados del cálculo de $R_{p0,2}$ para dos curvas de ensayo que presentan distinto grado de dispersión. En ambas figuras, se superpusieron ampliaciones de la región que corresponde a la intersección.

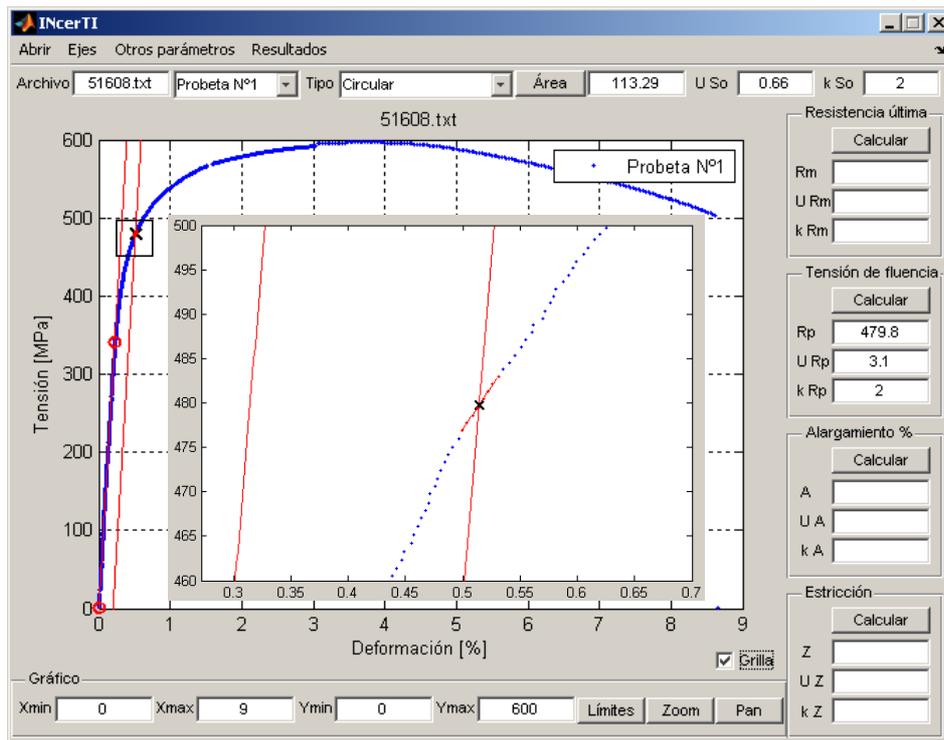


Figura 11: Curva típica de un caso donde hay poca dispersión

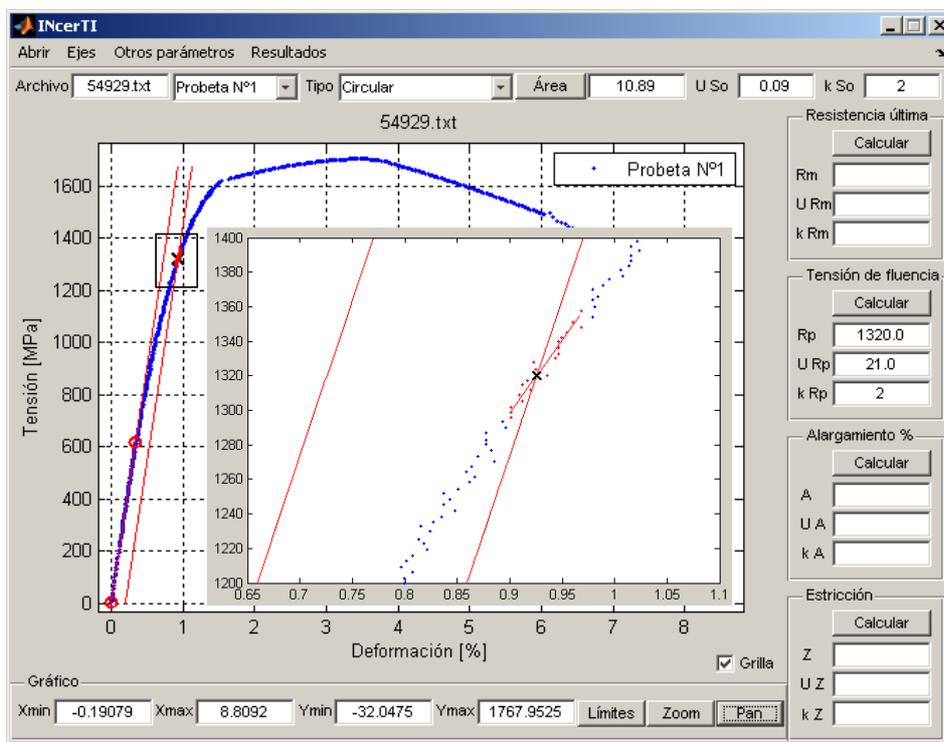


Figura 12: Curva correspondiente a un caso con dispersión considerable

En el caso de la Figura 11 el resultado de la medición es $R_{p0,2} = 479,8 \pm 3,1$ MPa, por lo tanto la incertidumbre representa el 0,65 % de la tensión calculada. En cambio en la curva de la Figura 12, donde se observa una mayor dispersión en los puntos experimentales, la incertidumbre constituye el 1,6 % del resultado de la medición ($R_{p0,2} = 1320,0 \pm 21,0$ MPa).

Desde la implementación de este software, los autores han notado que la incertidumbre estimada para este parámetro fluctúa entre el 0,4 y el 2 % del resultado de la medición. Esto muestra que el valor dado en (EN 10002-1, 2001) es muy conservador en la mayoría de los casos, ya que propone utilizar siempre un valor igual a 2,3 % del límite convencional de fluencia.

4.4 Cálculo de la tensión para una deformación total específica R_t

Para calcular el parámetro R_t , se accede al menú “Otros parámetros” y se selecciona la opción “Tensión para una deformación total especificada”. La secuencia de ingreso de datos es similar al caso del límite convencional de fluencia R_p . En el gráfico de la Figura 13 se muestra el resultado del cálculo de $R_{t0,5}$ para una curva de ensayo típica.

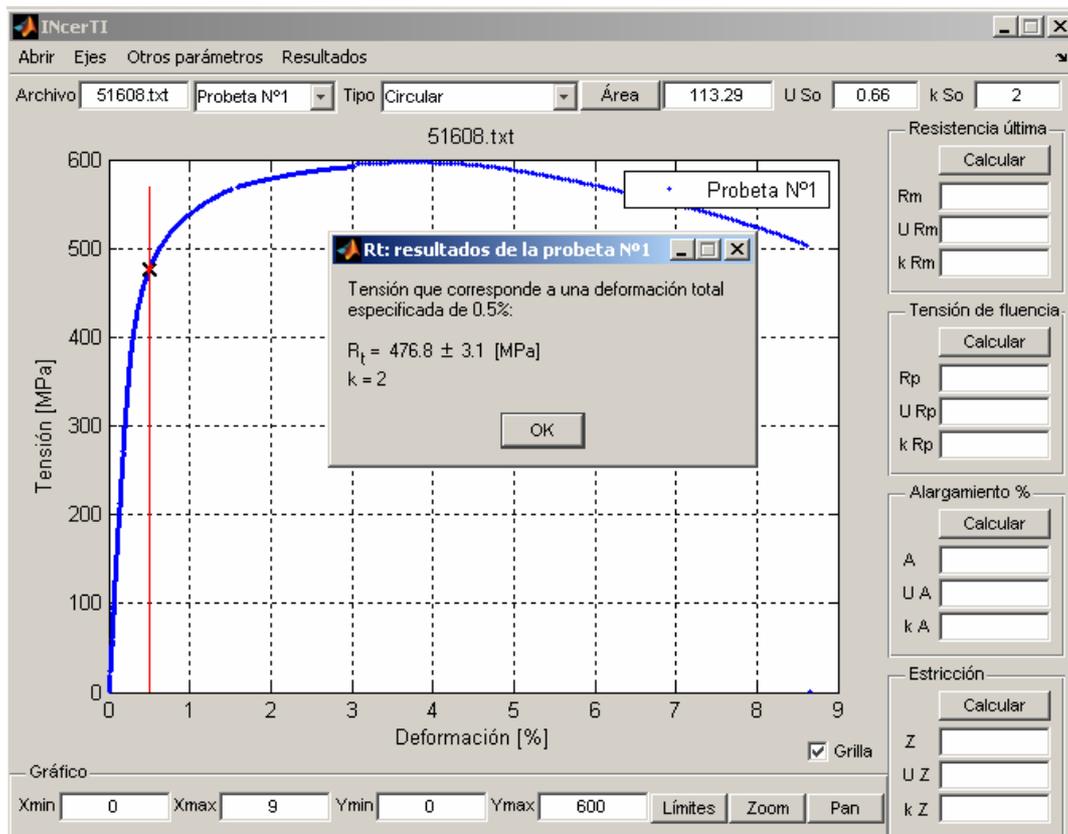


Figura 13: Curva de ensayo típica donde se muestra el cálculo del parámetro R_t

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se describieron los diferentes parámetros que permiten caracterizar la fluencia de un material. Se presentaron procedimientos numéricos para el cálculo de dichos parámetros y para la evaluación de sus incertidumbres. Para la evaluación de las incertidumbres, se tuvieron en cuenta las correlaciones entre las diferentes variables involucradas, siguiendo los lineamientos generales de la GUM.

Se presentó una herramienta computacional que permite analizar los registros experimentales de un ensayo, obtener los parámetros característicos y evaluar sus incertidumbres. La programación se realizó en el ambiente de programación Matlab[®], debido a la gran cantidad de herramientas disponibles y su facilidad de uso. La herramienta presentada, se utiliza actualmente en el Laboratorio de Ensayos Mecánicos del INTI Córdoba. Los autores no conocen otros laboratorios en Argentina donde se hayan incorporado desarrollos similares.

6. APÉNDICE A

TERMINOLOGÍA REFERIDA A LAS INCERTIDUMBRES DE MEDICIÓN

En este apéndice se exponen en orden alfabético algunos conceptos y definiciones importantes. Para profundizar dichos conceptos se recomienda recurrir a la GUM.

Incertidumbre

Parámetro asociado al resultado de una medición que caracteriza la dispersión de valores que pueden atribuirse en forma razonable al mensurando. La GUM agrupa a las fuentes de incertidumbres en dos categorías, A y B según el método de evaluación empleado.

Incertidumbre tipo A

Se denomina *incertidumbre del tipo A*, a la fuente de incertidumbre que se evalúa por medios estadísticos. La evaluación de este tipo de incertidumbre permite valorar la repetibilidad o aleatoriedad del proceso de medición.

Es posible que en algunos casos, la componente aleatoria de la incertidumbre no sea significativa en relación a otras contribuciones, sin embargo, siempre es aconsejable establecer la importancia relativa de los efectos aleatorios en el proceso de medición.

Incertidumbre tipo B

Se denomina *incertidumbre del tipo B*, a la incertidumbre que se evalúa por otros medios que no son estadísticos. Las componentes sistemáticas de la incertidumbre, es decir, aquellas que representan errores que permanecen constantes durante el proceso de medición, pueden evaluarse como incertidumbres del tipo B. En ese caso, las incertidumbres asociadas a la calibración de los instrumentos de medición empleados, representan las contribuciones más importantes.

Incertidumbre estándar

Se denomina *incertidumbre estándar* a la incertidumbre del resultado de una medición expresada como una desviación estándar.

Incertidumbre estándar combinada

Es la incertidumbre estándar del resultado de una medición cuando dicho resultado es obtenido a partir de los valores medidos de otras magnitudes.

En el caso de un mensurando f , función de variables de entrada x_1, x_2, \dots, x_n , medidas con incertidumbres estándar $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)$:

$$f = fun(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (35)$$

se puede demostrar que la desviación estándar del mensurando f , es función de las dispersiones $u(x_i)$ y las covarianzas $u(x_i, x_j)$, a través de la siguiente expresión (Kline, 1953; Coleman, 1999):

$$u_c(f) = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} u(x_1) \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} u(x_2) \right]^2 + \dots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_n} u(x_n) \right]^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)} \quad (36)$$

donde las derivadas parciales se denominan coeficientes de sensibilidad, $c_i = \partial f / \partial x_i$.

La ecuación (36) está basada en una aproximación en serie de Taylor de primer orden de la ecuación (35) y expresa lo que se denomina como la “*ley de propagación de incertidumbres*”. Notar que la expresión (36) se simplifica cuando las variables de entrada no se encuentran correlacionadas, ya que en este caso las covarianzas $u(x_i, x_j)$ son nulas.

Es importante mencionar que pueden existir otras fuentes de incertidumbre que no aparecen explícitamente en la relación funcional (35). En ese caso, la incertidumbre combinada puede expresarse en una forma más general de la siguiente manera:

$$u_c(f) = \sqrt{\sum_{i=1}^n [c_i u(x_i)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_i c_j u(x_i, x_j) + \sum_{k=1}^m (u_k)^2} \quad (37)$$

donde los valores u_k son las incertidumbres estándar asociadas a las fuentes no incluidas en la expresión (35).

Incertidumbre expandida

Es la que resulta de multiplicar la incertidumbre estándar por un factor de cobertura k :

$$U = k u_c(f) \quad (38)$$

Factor de cobertura

Es un número que multiplicado por la incertidumbre estándar combinada, produce un intervalo (incertidumbre expandida) alrededor del resultado de la medición que se espera abarque un porcentaje especificado (i.e. 95 %) de la distribución de valores que pueden atribuirse al mensurando. El cálculo del factor de cobertura se realiza en base a un nivel de confianza dado y a los grados de libertad que corresponden a la incertidumbre estándar combinada, asumiendo una distribución de probabilidad de Student.

Grados de libertad efectivos

En general, el número de grados de libertad de un estimador es igual al número de mediciones realizadas menos el número de parámetros determinados a partir de ellas. Es una propiedad de una suma de cuadrados y se determina por el número de comparaciones lineales independientes que se pueden hacer entre las observaciones (Walpole et al., 1999; Montgomery and Runge, 1996). Debido a que la incertidumbre estándar combinada puede estar compuesta por diferentes fuentes de incertidumbre, generalmente no se conocen los grados de libertad efectivos de la combinación. Sin embargo, según el Método de Welch-Satterthwaite (Welch, 1937; Satterthwaite, 1946), los grados de libertad efectivos pueden aproximarse mediante la siguiente fórmula:

$$\nu_f = \frac{[u_c(f)]^4}{[c_1 u(x_1)]^4 / \nu_{x_1} + [c_2 u(x_2)]^4 / \nu_{x_2} + \dots + [c_n u(x_n)]^4 / \nu_{x_n}} \quad (39)$$

donde $\nu_{x_1}, \nu_{x_2}, \dots, \nu_{x_n}$ son los grados de libertad de cada una de las contribuciones.

Es importante mencionar que la expresión (39) es válida para el caso en que los argumentos de entrada no están correlacionados y además el número de grados de libertad de cada una de las contribuciones individuales es como mínimo dos.

Para argumentos correlacionados puede utilizarse una generalización de la expresión de Welch-Satterthwaite propuesta recientemente por Willink (2007):

$$\nu_{ef} = [u_c(f)]^4 / \left(\sum_{i=1}^{i=n} \left[\sum_{j=1}^{j=n} c_i c_j u(x_i, x_j) \right]^2 / \nu_i \right) \quad (40)$$

En este trabajo, los autores proponen la ecuación (41) que es una variante de la fórmula de la mediana de Lepek (2003) donde se reemplazó el término central por la expresión (40):

$$\nu_{ef} = \text{mediana} \left\{ \text{menor} \{ \nu_i \}, [u_c(f)]^4 / \left(\sum_{i=1}^{i=n} \left[\sum_{j=1}^{j=n} c_i c_j u(x_i, x_j) \right]^2 / \nu_i \right), \sum_{i=1}^n \nu_i \right\} \quad (41)$$

donde la función mediana asegura que el valor calculado no resulta menor que la menor de las contribuciones individuales ni tampoco mayor a la suma de ellas.

Mensurando

Cantidad específica sujeta a medición

Nivel de confianza

Probabilidad que el valor del mensurando se encuentre dentro de un intervalo especificado.

7. APÉNDICE B:

PROCEDIMIENTO PAR EVALUACIÓN DE INCERTIDUMBRES

El siguiente procedimiento para el cálculo de incertidumbres en las mediciones está basado en la guía GUM.

La estimación de la incertidumbre asociada a la medición de una cantidad Y involucra los siguientes pasos:

- I. Encontrar la relación matemática que vincula las cantidades de entrada estimadas (x_1, x_2, \dots, x_n) y el mensurando Y :

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (42)$$

- II. De la expresión (42) obtener los coeficientes de sensibilidad asociados a cada variable de entrada:

$$c_{x_1} = \frac{\partial Y}{\partial x_1}, \quad c_{x_2} = \frac{\partial Y}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad c_{x_n} = \frac{\partial Y}{\partial x_n} \quad (43)$$

- III. Identificar todas las posibles fuentes de incertidumbre. Cada una de las variables de entrada pueden tener incertidumbres asociadas y además pueden existir otras fuentes de incertidumbre que no aparecen explícitamente en la expresión (42).
- IV. Medir o estimar cada variable de entrada x_i y luego:
 - i. Evaluar la incertidumbre combinada asociada a la medición de x_i , teniendo en cuenta incertidumbres del tipo A, del tipo B o ambas. Deben combinarse como indica la ecuación (37).
 - ii. Calcular los grados de libertad efectivos de la medición de x_i , según (39) ó (41).
- V. Evaluar las fuentes de incertidumbre que no aparecen explícitamente en la ecuación de cálculo (42).
- VI. Obtener la incertidumbre estándar combinada de la medición de Y , aplicando la expresión (37).
- VII. Calcular los grados de libertad efectivos en la medición de Y (ecuación (39) ó (41)).
- VIII. Con los grados de libertad efectivos y un nivel de confianza dado, obtener el factor de cobertura de una tabla de t de Student de dos colas.
- IX. Calcular el valor del mensurando de acuerdo con la expresión (42) y expresar el resultado de la medición cómo sigue:

$$V = Y \pm U \quad (44)$$

donde V es el valor estimado del mensurando y U es la incertidumbre expandida asociada a Y .

REFERENCIAS

- ASTM E8-04, *Tensile testing of metallic materials. Method of test at ambient temperature*, 2004.
- BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, *Guide to the expression of uncertainty in measurement*, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland. ISBN 92-67-10188-9, First Edition, 1993.
- Coleman H.W., Steele W.G., *Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers*, Second Edition, Wiley, New York, 1999.
- Dieter G., *Physical metallurgy*, McGraw-Hill, U.S.A., 1986.
- EN 10002-1, *Tensile testing of metallic materials. Method of test at ambient temperature*, 2001.
- Gabauer W., *The determination of uncertainties in tensile testing*, UNCERT COP 07, ISBN 0-946754-41-1, Issue 1, 2000.
- Han P., *Tensile testing*, ASM International, 1992.
- INTI, Instituto Nacional de Tecnología Industrial, www.inti.gov.ar.
- IRAM 301 - ISO/IEC 17025, *Requisitos generales para la competencia de los laboratorios de ensayo y de calibración*, 2005.
- IRAM IAS U 500-102, *Productos de acero. Método de ensayo de tracción. Condiciones generales*, 1987.
- Kline S.J., McClintock F.A., Describing uncertainties in single-sample experiments, *Mechanical Engineering*, **75**(1):3-8, 1953.
- Krystek M., Anton M., A weighted total least squares algorithm for fitting a straight line, measurement, *Science Technology*, **18**:3438-3442, 2007.
- Lepek A. A computer program for a general case evaluation of the expanded uncertainty, Accreditation and Quality Assurance, *Journal for Quality, Comparability and Reliability in Chemical Measurement*, **8**(6):296-299, 2003.
- Maiztegui A. y Gleiser J., *Mediciones de laboratorio*, Taller Gráfico de José Solsona, 2000.
- Montgomery D. and Runge G., *Probabilidad y Estadística Aplicada a la Ingeniería*, John Wiley & Sons, ISBN 0-471-54041-2, 1996.
- Satterthwaite F., An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components, *Biometrics Bulletin*, **2**(6):110-114, 1946.
- Walpole R.E., Myers R.H. and Myers S.L., *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*, Sexta Edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, ISBN 970-17-0264-6, 1999.
- Welch B., The significance of the difference between two means when the population variances are unequal, *Biometrika* **29**:250-362, 1937.
- Willink R., A Generalization of the welch-satterthwaite formula for use with correlated uncertainty components, *Metrologia*, **44**:340-349, 2007.