CORRECCIÓN DEL MISMATCH E INCERTIDUMBRE ASOCIADA EN LA MEDICIÓN DE POTENCIA EN RF

H. Silva, G. Monasterios, A. Henze y N. Tempone
Instituto Nacional de Tecnología Industrial (INTI), Electrónica e Informática, Lab. Metrología RF & Microondas
Colectora de Avenida General Paz 5445, B1650KNA, San Martín, República Argentina
Tel: (+5411) 4724-6200 / 6300 / 6400, e-mail: metrologiarf@inti.gov.ar

Resumen: En este documento se evalúan las incertidumbres que aparecen como consecuencia de la falta de adaptación en sistemas de medición cuando se dispone del valor de las componentes real e imaginaria de los coeficientes de reflexión. Particularmente este trabajo se enfoca en las incertidumbres por desadaptación al medir potencia en RF y el factor de calibración de sensores de potencia por el método de comparación directa.

1. INTRODUCCIÓN

En mediciones de potencia incidente de una fuente de RF, el factor de desadaptación, o “Mismatch” M, se define como [1]:

$$\mathrm{M} = \frac{1}{|1 - \Gamma_G \Gamma_L|^2} \tag{1}$$

donde Γ_G representa el coeficiente de reflexión de la fuente de señal y Γ_L representa el coeficiente de reflexión de la carga.

En el caso de la calibración de sensores de potencia por el método de comparación directa, cuando se expresa el factor de calibración del sensor bajo prueba (DUT) en función del factor de calibración del sensor patrón [1], el factor de desadaptación MM es:

$$\mathrm{MM} = \frac{|1 - \Gamma_G \Gamma_{DUT}|^2}{|1 - \Gamma_G \Gamma_{STD}|^2} \tag{2}$$

donde Γ_G representa el coeficiente de reflexión de la fuente de señal, Γ_{STD} representa el coeficiente de reflexión del sensor patrón y Γ_{DUT} representa el coeficiente de reflexión del sensor bajo prueba.

En general, en la estimación de la incertidumbre debida a los factores de desadaptación, se suele considerar que la información de fase de los coeficientes de reflexión involucrados es desconocida. Como resultado, no es posible corregir estos factores, por lo que debe considerarse que M o MM son iguales a 1 con una incertidumbre asociada, debido al desconocimiento de la fase de uno o más coeficientes de reflexión [2].
Sin embargo, si los coeficientes de reflexión involucrados son medidos, se puede calcular el valor de M o MM y de esta forma corregir el valor del resultado de la medición.

En el presente trabajo se calculan las varianzas de M y MM, tanto en forma analítica como por medio del método de la GUM [5], a partir de los coeficientes de reflexión complejos medidos con sus incertidumbres asociadas.
Seguidamente se comparan los desvíos standards resultantes de los cálculos con los obtenidos aplicando el método de Monte Carlo a ambos factores de desadaptación y se discuten las diferencias observadas.

2. ANÁLISIS DE LOS FACTORES DE DESADAPTACIÓN

2.1 ANÁLISIS DE M

El análisis del factor M se lleva a cabo por medio de una expresión aproximada que permite simplificar considerablemente los desarrollos.
Partiendo de (1) se obtiene:

$$\mathrm{M} = 1 + 2|\Gamma_G||\Gamma_L|\cos\phi - (|\Gamma_G||\Gamma_L|\operatorname{sen}\phi)^2$$

El ángulo ϕ es la suma de las fases de ambos coeficientes de reflexión.
Si se cumple la siguiente condición:

$$|\Gamma_G||\Gamma_L| << 1$$

entonces se obtiene la siguiente expresión aproximada de M:

$$M \approx 1 + 2\,\mathrm{Re}\left\{\Gamma_G \Gamma_L\right\} \quad (3)$$

donde:

$$\Gamma_G = X_1 + jY_1 \quad (4)$$

$$\Gamma_L = X_2 + jY_2 \quad (5)$$

y Re representa la parte real.

X_1 y X_2 son las variables aleatorias de la parte real de los coeficientes de reflexión Γ_G y Γ_L respectivamente. Asimismo, Y_1 e Y_2 son las variables aleatorias de la parte imaginaria de los coeficientes de reflexión Γ_G y Γ_L. Todas estas variables aleatorias se consideran independientes entre sí.

Además:

$$\Gamma_G \Gamma_L = (X_1X_2 - Y_1Y_2) + j(X_1Y_2 + X_2Y_1) \quad (6)$$

Por medio de las expresiones (3), (4) y (5) se calcula la esperanza matemática de M:

$$E(M) \approx 1 + 2(x_1x_2 - y_1y_2) \quad (7)$$

donde se definen los valores estimados de Γ_G y Γ_L como:

$$\overline{\Gamma}_G = x_1 + jy_1$$

$$\overline{\Gamma}_L = x_2 + jy_2$$

Estos valores corresponden al resultado de la medición de dichos parámetros. De la Ec. (7) se observa que para calcular el valor estimado de M se debe conocer el valor estimado de ambos coeficientes de reflexión.

La varianza de M se obtiene partiendo de la expresión aproximada (3):

$$\sigma^2\left(\mathrm{Re}\{\Gamma_G\Gamma_L\}\right) = E\left(\mathrm{Re}\{\Gamma_G\Gamma_L\}^2\right) - E\left(\mathrm{Re}\{\Gamma_G\Gamma_L\}\right)^2 \quad (8)$$

$$= E\left((X_1X_2 - Y_1Y_2)^2\right) - E\left(X_1X_2 - Y_1Y_2\right)^2 \quad (9)$$

Considerando que para una variable aleatoria X se cumple que:

$$E(X^2) = \sigma_X^2 + E(X)^2 \quad (10)$$

siendo σ_X^2 la varianza de X.

Entonces, reemplazando en (9) y operando:

$$\sigma^2\left(\mathrm{Re}\{\Gamma_G\Gamma_L\}\right) = \sigma_{X_1}^2\sigma_{X_2}^2 + y_2\sigma_{Y_1}^2 + x_1\sigma_{X_2}^2 + x_2\sigma_{X_1}^2 + y_1\sigma_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_1}^2\sigma_{Y_2}^2 \quad (11)$$

Para cada coeficiente de reflexión medido se asume que las varianzas de las componentes real e imaginaria son iguales entre sí, debido al modelo adoptado para la estimación de incertidumbres en la medición del coeficiente de reflexión [3] [4]:

$$\sigma_1^2 = \sigma_{X_1}^2 = \sigma_{Y_1}^2 \quad (12)$$

$$\sigma_2^2 = \sigma_{X_2}^2 = \sigma_{Y_2}^2 \quad (13)$$

Operando algebraicamente se obtiene la varianza de M como:

$$\sigma^2(M) \approx 4\sigma^2\left(\mathrm{Re}\{\Gamma_G\Gamma_L\}\right)$$

$$\sigma^2(M) \approx 8\sigma_1^2\sigma_2^2 + 4\left|\overline{\Gamma}_L\right|^2\sigma_1^2 + 4\left|\overline{\Gamma}_G\right|^2\sigma_2^2 \quad (14)$$

Se puede distinguir en la expresión (14) una parte no lineal respecto a las varianzas compuesta por el primer término y una parte lineal respecto a las mismas compuesta por los dos términos restantes.

La varianza de M también puede ser calculada siguiendo la metodología de la GUM. Es importante destacar que la GUM utiliza una aproximación en serie de Taylor de primer orden para el cálculo de la varianza del mensurando, donde los coeficientes de cada término lineal son las derivadas parciales de la expresión a analizar.

Aplicando dicha metodología a la expresión (3) se obtiene como resultado:

$$\sigma^2(M) = 4\left|\overline{\Gamma}_L\right|^2\sigma_1^2 + 4\left|\overline{\Gamma}_G\right|^2\sigma_2^2 \quad (15)$$

Es interesante notar que tanto la expresión (15) obtenida mediante el método de la GUM, como la expresión (14) alcanzada analíticamente coinciden en los términos lineales. El método de la GUM llega a un resultado para el cálculo de la varianza por medio de una aproximación lineal respecto a las variables de entrada. En cambio, el cálculo analítico al no tener esta restricción, llega a una expresión más exacta.

2.2 ANÁLISIS DE MM

Al igual que para M, el análisis del factor MM se lleva a cabo por medio de una expresión aproximada que permite simplificar considerablemente los desarrollos.
Partiendo de (2) se obtiene:

$$MM = \left(\frac{1 + 2|\Gamma_G||\Gamma_{DUT}|\cos\phi_1 - \left(|\Gamma_G||\Gamma_{DUT}|\mathrm{sen}\phi_1\right)^2}{1 + 2|\Gamma_G||\Gamma_{STD}|\cos\phi_2 - \left(|\Gamma_G||\Gamma_{STD}|\mathrm{sen}\phi_2\right)^2} \right)$$

El ángulo ϕ_1 es la suma de las fases de Γ_G y Γ_{DUT}.
El ángulo ϕ_2 es la suma de las fases de Γ_G y Γ_{STD}.
Si se cumplen las siguientes condiciones:

$$|\Gamma_G||\Gamma_{DUT}| << 1$$
$$|\Gamma_G||\Gamma_{STD}| << 1$$

entonces se obtiene la siguiente expresión aproximada de MM:

$$MM \approx 1 + 2\,\mathrm{Re}\{\Gamma_G\,\Gamma_{STD}\} - 2\,\mathrm{Re}\{\Gamma_G\,\Gamma_{DUT}\} \quad (16)$$

donde:

$$\Gamma_G = X_1 + jY_1 \quad (17)$$
$$\Gamma_{DUT} = X_2 + jY_2 \quad (18)$$
$$\Gamma_{STD} = X_3 + jY_3 \quad (19)$$

X_1, X_2 y X_3 son las variables aleatorias de la parte real de los coeficientes de reflexión Γ_G, Γ_{DUT} y Γ_{STD}, respectivamente. Asimismo Y_1, Y_2 e Y_3 son las variables aleatorias de la parte imaginaria de los coeficientes de reflexión Γ_G, Γ_{DUT} y Γ_{STD}. Todas estas variables aleatorias se consideran independientes entre sí.
Para calcular la esperanza matemática de (16) se aplica (6) a ambos términos que incluyen la parte real del producto de coeficientes de reflexión:

$$E(MM) \approx 1 + 2(x_1x_3 - y_1y_3) - 2(x_1x_2 - y_1y_2) \quad (20)$$

donde se definen los valores estimados de Γ_G, Γ_{DUT} y Γ_{STD} como:

$$\bar{\Gamma}_G = x_1 + jy_1$$
$$\bar{\Gamma}_{DUT} = x_2 + jy_2$$
$$\bar{\Gamma}_{STD} = x_3 + jy_3$$

La varianza total de (16) se calcula según la siguiente expresión:

$$\sigma^2(MM) \approx \sigma^2\left(1 + 2\,\mathrm{Re}\{\Gamma_G\,\Gamma_{STD}\} - 2\,\mathrm{Re}\{\Gamma_G\,\Gamma_{DUT}\}\right)$$
$$\sigma^2(MM) \approx 4\sigma^2\left(\mathrm{Re}\{\Gamma_G\,\Gamma_{STD}\}\right) + 4\sigma^2\left(\mathrm{Re}\{\Gamma_G\,\Gamma_{DUT}\}\right) - 8\,\mathrm{cov}\left(\mathrm{Re}\{\Gamma_G\,\Gamma_{STD}\}, \mathrm{Re}\{\Gamma_G\,\Gamma_{DUT}\}\right) \quad (21)$$

Los primeros dos términos de la Ec. (21) ya fueron calculados para la varianza de M:

$$\sigma^2\left(\mathrm{Re}\{\Gamma_G\Gamma_{STD}\}\right) = 2\sigma_1^2\sigma_3^2 + \left|\bar{\Gamma}_{STD}\right|^2\sigma_1^2 + \left|\bar{\Gamma}_G\right|^2\sigma_3^2 \quad (22)$$
$$\sigma^2\left(\mathrm{Re}\{\Gamma_G\Gamma_{DUT}\}\right) = 2\sigma_1^2\sigma_2^2 + \left|\bar{\Gamma}_{DUT}\right|^2\sigma_1^2 + \left|\bar{\Gamma}_G\right|^2\sigma_2^2 \quad (23)$$

donde:

$$\sigma_1^2 = \sigma_{X_1}^2 = \sigma_{Y_1}^2$$
$$\sigma_2^2 = \sigma_{X_2}^2 = \sigma_{Y_2}^2$$
$$\sigma_3^2 = \sigma_{X_3}^2 = \sigma_{Y_3}^2$$

El tercer término representa la covarianza entre los dos primeros términos y puede demostrarse que es igual a:

$$\mathrm{cov}\left(\mathrm{Re}\{\Gamma_G\Gamma_{STD}\}, \mathrm{Re}\{\Gamma_G\Gamma_{DUT}\}\right) = \sigma_1^2\left(x_3x_2 - y_3y_2\right) \quad (24)$$

Finalmente, sumando las Ecs. (22), (23) y (24) se obtiene la expresión de la varianza de MM:

$$\sigma^2(MM) \approx 4\left[2\sigma_1^2\sigma_3^2 + \left|\bar{\Gamma}_{STD}\right|^2\sigma_1^2 + \left|\bar{\Gamma}_G\right|^2\sigma_3^2\right] + 4\left[2\sigma_1^2\sigma_2^2 + \left|\bar{\Gamma}_{DUT}\right|^2\sigma_1^2 + \left|\bar{\Gamma}_G\right|^2\sigma_2^2\right] - 8\sigma_1^2\left[x_3x_2 - y_3y_2\right]$$

$$\sigma^2(MM) \approx 8\sigma_1^2\sigma_3^2 + 4\left|\bar{\Gamma}_{STD}\right|^2\sigma_1^2 + 4\left|\bar{\Gamma}_G\right|^2\sigma_3^2 + 8\sigma_1^2\sigma_2^2 + 4\left|\bar{\Gamma}_{DUT}\right|^2\sigma_1^2 + 4\left|\bar{\Gamma}_G\right|^2\sigma_2^2 - 8\sigma_1^2\left[x_3x_2 - y_3y_2\right] \quad (25)$$

La varianza de MM también puede ser calculada siguiendo la metodología de la GUM. El suplemento 2 de dicha guía [6] detalla la siguiente expresión matricial:

$$U_y = C_x\,U_x\,C_x^T \quad (26)$$

En la Ec. (26) U_x corresponde a la matriz covarianza de entrada. Al igual que en M, se asume que los coeficientes de reflexión medidos poseen las varianzas de las componentes real e imaginaria iguales entre sí, entonces U_x toma la siguiente forma:

$$U_x = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \qquad (27)$$

C_x corresponde a un vector traspuesto cuyas componentes representan a los coeficientes de sensibilidad:

$$C_x = \left(\frac{\partial MM}{\partial X_1} \quad \frac{\partial MM}{\partial Y_1} \quad \frac{\partial MM}{\partial X_2} \quad \frac{\partial MM}{\partial Y_2} \quad \frac{\partial MM}{\partial X_3} \quad \frac{\partial MM}{\partial Y_3} \right) \quad (28)$$

U_y corresponde a la varianza de MM.

Introduciendo los resultados de las Ecs. (27) y (28) en (26):

$$\sigma^2(MM) = 4\left|\overline{\Gamma}_{STD}\right|^2 \sigma_1^2 + 4\left|\overline{\Gamma}_G\right|^2 \sigma_3^2 + 4\left|\overline{\Gamma}_{DUT}\right|^2 \sigma_1^2 + 4\left|\overline{\Gamma}_G\right|^2 \sigma_2^2 - 8\sigma_1^2\left[x_3 x_2 - y_3 y_2\right] \qquad (29)$$

Se observa que la expresión (29) difiere de (25) en la ausencia de los términos no lineales respecto a las varianzas.

Por lo tanto, al igual que con el cálculo de $\sigma^2(M)$, el método de la GUM llega a un resultado para el cálculo de la varianza por medio de una aproximación lineal respecto a las varianzas de las variables de entrada. En cambio el cálculo analítico, al no tener esta restricción, llega a una expresión más exacta.

3. RESULTADOS

En esta sección se comparan las expresiones analíticas (14) y (25) y las aproximaciones lineales siguiendo la metodología de la GUM (15) y (29) con los resultados que se obtienen con una simulación de Monte Carlo.

La simulación de Monte Carlo se realiza con 1×10^6 muestras, asignando una distribución gaussiana bivariada a los coeficientes de reflexión donde $|\Gamma_G| = |\Gamma_L|$ para M y $|\Gamma_G| = |\Gamma_{DUT}| = |\Gamma_{STD}|$ para MM.

3.1. Varianza de M

En la Tabla 1 se presenta un caso donde el desvío standard de las componentes de ambos coeficientes de reflexión es bajo, $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$ mU. Se observa una buena coincidencia de ambas expresiones con los resultados de la simulación por el método de Monte Carlo, que son de esta forma validadas para este caso. Las diferencias no son significativas, disminuyendo a medida que aumentan los módulos de los coeficientes de reflexión.

En la Tabla 2 se incrementa el valor del desvío standard a $\sigma_1 = \sigma_2 = 10$ mU, donde se observan efectos similares al caso anterior.

En la Tabla 3 se incrementa el valor del desvío standard a $\sigma_1 = \sigma_2 = 100$ mU. Se observa que el método empleado por la GUM difiere de la simulación de Monte Carlo ya que carece del término alineal. Por otro lado, en todos los casos se verifica que la expresión analítica muestra concordancia con las simulaciones.

$\lvert\Gamma_G\rvert = \lvert\Gamma_L\rvert$	$\sigma(M)$		
	Expresión Analítica [x10^{-3}]	GUM [x10^{-3}]	Monte Carlo [x10^{-3}]
≈0	0,0707	0	0,0704
0,02	0,292	0,283	0,291
0,04	0,570	0,566	0,570
0,06	0,852	0,849	0,880
0,08	1,13	1,13	1,15
0,1	1,42	1,41	1,49

Tabla 1. *Verificación de las expresiones de desadaptación con* $\sigma_1 = \sigma_2$ *=0,005*

$\lvert\Gamma_G\rvert = \lvert\Gamma_L\rvert$	$\sigma(M)$		
	Expresión Analítica [x10^{-3}]	GUM [x10^{-3}]	Monte Carlo [x10^{-3}]
≈0	0,283	0	0,278
0,02	0,633	0,566	0,629
0,04	1,17	1,13	1,16
0,06	1,72	1,70	1,76
0,08	2,28	2,26	2,35
0,1	2,84	2,83	2,91

Tabla 2. *Verificación de las expresiones de desadaptación con* $\sigma_1 = \sigma_2$ *=0,01*

$\lvert\Gamma_G\rvert = \lvert\Gamma_L\rvert$	$\sigma(M)$		
	Expresión Analítica [x10^{-3}]	GUM [x10^{-3}]	Monte Carlo [x10^{-3}]
≈0	28,3	0	27,4
0,02	28,8	5,66	28,8
0,04	30,5	11,3	30,7
0,06	33,0	17,0	33,3
0,08	36,2	22,6	37,0
0,1	40,0	28,3	42,1

Tabla 3. *Verificación de las expresiones de desadaptación con* $\sigma_1 = \sigma_2$ *=0,1*

3.2. Varianza de MM

En la Tabla 4 se muestra un caso donde el desvío standard de las componentes de los coeficientes de reflexión involucrados es bajo, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ = 5 mU.
En la Tabla 5 se incrementa el valor del desvío standard a $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ = 10 mU.
En la Tabla 6 se incrementa el valor del desvío standard a $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ = 100 mU.

En las tablas 4 a 6 se observa un comportamiento del desvío standard de MM similar al descrito en la sección 3.1 para el desvío standard de M. También se verifica que la expresión analítica de la varianza de MM muestra concordancia con las simulaciones.

$\lvert\Gamma_G\rvert = \lvert\Gamma_{DUT}\rvert = \lvert\Gamma_{STD}\rvert$	$\sigma(MM)$		
	Expresión Analítica [x10^{-3}]	GUM [x10^{-3}]	Monte Carlo [x10^{-3}]
≈0	0,100	0	0,0973
0,02	0,300	0,283	0,300
0,04	0,575	0,566	0,571
0,06	0,854	0,849	0,863
0,08	1,14	1,13	1,13
0,1	1,42	1,41	1,41

Tabla 4. *Verificación de las expresiones de desadaptación con* $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ *= 0,005*

$\lvert\Gamma_G\rvert = \lvert\Gamma_{DUT}\rvert = \lvert\Gamma_{STD}\rvert$	$\sigma(MM)$		
	Expresión Analítica [x10^{-3}]	GUM [x10^{-3}]	Monte Carlo [x10^{-3}]
≈0	0,400	0	0,410
0,02	0,693	0,566	0,688
0,04	1,20	1,13	1,19
0,06	1,74	1,70	1,76
0,08	2,30	2,26	2,29
0,1	2,86	2,83	2,89

Tabla 5. *Verificación de las expresiones de desadaptación con* $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ *= 0,01*

$\lvert\Gamma_G\rvert = \lvert\Gamma_{DUT}\rvert = \lvert\Gamma_{STD}\rvert$	$\sigma(MM)$		
	Expresión Analítica [x10^{-3}]	GUM [x10^{-3}]	Monte Carlo [x10^{-3}]
≈0	40,0	0	39,6
0,02	40,4	5,66	40,2
0,04	41,6	11,3	42,1
0,06	43,5	17,0	44,6
0,08	46,0	22,6	46,0
0,1	49,0	28,3	49,3

Tabla 6. *Verificación de las expresiones de desadaptación con* $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ *= 0,1*

4. CONCLUSIONES

En las tablas comparativas de la secciones precedentes se puede apreciar que si el desvío standard de las componentes de los coeficientes de reflexión es comparativamente pequeño respecto al valor de sus módulos, las expresiones obtenidas en forma analítica y mediante el método de la GUM obtienen resultados similares y coincidentes con los resultados generados mediante el método de Monte Carlo.
Sin embargo, cuando el valor del desvío standard de las componentes de los coeficientes de reflexión aumenta respecto a sus módulos, el término alineal de la expresión analítica comienza a influir. En estos casos, se deben utilizar las expresiones (14) y (25). En el resto de los casos, la aproximación lineal siguiendo la metodología de la GUM permite obtener un valor adecuado para estimar la incertidumbre por desadaptación.

REFERENCIAS

[1] Agilent "(AN 1449-3): Fundamentals of RF and microwave power measurements (Part 3)", Abril 2011.

[2] B. Hall, "The uncertainty of a complex quantity with unknown phase", 33th ANAMET Meeting, Mayo 2010.

[3] K. Yhland, J. Stenarson, "A Simplified treatment of uncertainties in complex quantities", en 2004 Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest, pág. 652-653, Junio 2004.

[4] R. Willink, B. D. Hall, "A classical method for uncertainty analysis with multidimensional data", en Metrologia, vol. 39, pág. 361-369, 2002.

[5] BIPM, "Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement", Septiembre 2008.

[6] BIPM, "Evaluation of measurement data - Suplement 2 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement - Extension to any number of output quantities", Octubre 2011.

[7] INTI - Lab. Metrología RF & Microondas, "Incertidumbre por Desadaptación en RF (Parte 1)", Septiembre 2011.

[8] INTI - Lab. Metrología RF & Microondas, "Incertidumbre por Desadaptación en RF (Parte 2)", Mayo 2012.