



Incertidumbre por Desadaptación en RF - parte 1

G. Monasterios
H. Silva
A. Henze
N. Tempone
Lab. Metrología RF & Microondas, INTI

<http://www.inti.gov.ar/electronicaeinformatica/metrologiarf>
guillem@inti.gov.ar

Septiembre 2011

Índice

1. Introducción	2
2. Marco Teórico	2
2.1. Definición de Mismatch	2
2.2. Distribuciones de probabilidad marginales	3
2.2.1. Distribución Anillo Uniforme	3
2.2.2. Distribución Disco Uniforme	3
2.3. Distribución de probabilidad del producto de vectores	4
2.3.1. Varianza de la incertidumbre por Mismatch	4
3. Distribuciones de probabilidad del Mismatch	5
3.1. Distribución Anillo/Anillo	5
3.2. Distribución Anillo/Disco	6
3.3. Distribución Disco/Disco	6
4. Distribuciones de probabilidad del Mismatch en Transmisión	6
5. Resumen	8
6. Ejemplos	8
6.1. Ejemplo 1. Generador de RF	8
6.2. Ejemplo 2. Analizador de Espectro	9
6.3. Ejemplo 3. Atenuación	11
Bibliografía	13

1. Introducción

El siguiente documento describe las metodologías de cálculo empleadas en la evaluación de una de las fuentes de incertidumbre de mayor peso al medir Potencia en RF y Microondas: la incertidumbre por Desadaptación o Mismatch. El Mismatch se produce como consecuencia de las múltiples reflexiones ocasionadas en una línea de transmisión cuando los extremos presentan una impedancia distinta a la impedancia característica de la línea, Z_0 . Una impedancia distinta a Z_0 implica un Coeficiente de Reflexión $\Gamma \neq 0$, siendo Γ una magnitud bidimensional (variable compleja) de la cual, en general, se desconoce el valor de su fase, lo que trae aparejado que el vector módulo $|\Gamma|$ (extremo fijo en el origen de coordenadas) empiece a rotar en el plano complejo ya que cualquier valor de fase es posible. Esto delimita un área en el plano complejo y en consecuencia una incertidumbre respecto al verdadero valor de la coordenada que representa el coeficiente de reflexión complejo. En la sección 3 se presentan los tres casos más comunes según la información disponible de los Coeficientes de Reflexión presentes en el esquema de medición, donde se verán diversos ejemplos que ayuden como referencia en los cálculos de incertidumbre que se deban realizar en los laboratorios de medición en RF.

2. Marco Teórico

2.1. Definición de Mismatch

En un sistema donde un generador de RF inyecta una señal en una línea de transmisión, la Potencia incidente P_i en la carga está dada por [1]:

$$P_i = |bs|^2 \frac{1}{|1 - \Gamma_G \Gamma_L|^2} \quad (1)$$

donde Γ_G y Γ_L son los coeficientes de reflexión del generador y de la carga respectivamente. En el caso que la carga tenga una impedancia igual a la impedancia característica Z_0 de la línea, entonces $|\Gamma_L| = 0$ por lo que $P_i|_{Z_0} = |bs|^2$.

La variación en la potencia incidente entre el caso de carga adaptada a Z_0 y el caso en que tanto Γ_G como Γ_L son $\neq 0$ es:

$$\frac{\Delta P_i}{P_i} = \frac{1}{|1 - \Gamma_G \Gamma_L|^2} \quad (2)$$

Expandiendo el denominador se llega a:

$$\frac{\Delta P_i}{P_i} = \frac{1}{1 - 2|\Gamma_G||\Gamma_L| \cos(\phi_G + \phi_L) + |\Gamma_G|^2|\Gamma_L|^2} \quad (3)$$

Dado que los valores de $|\Gamma_L|$ y $|\Gamma_G|$ son cercanos a cero se puede despreciar el término cuadrático, quedando la siguiente relación:

$$\frac{\Delta P_i}{P_i} = \frac{1}{1 - 2|\Gamma_G||\Gamma_L| \cos(\phi_G + \phi_L)} \quad (4)$$

o también, de forma de recalcar la naturaleza vectorial de los coeficientes de reflexión:

$$\frac{\Delta P_i}{P_i} = \frac{1}{1 - 2 \operatorname{Re}(\Gamma_G \Gamma_L)} \quad (5)$$

$$\frac{\Delta P_i}{P_i} \approx 1 + 2 \operatorname{Re}(\Gamma_G \Gamma_L) \quad (6)$$

Al segundo miembro del segundo término se lo denomina “Error por Mismatch”:

$$M = 2 \operatorname{Re}(\Gamma_G \Gamma_L) \quad (7)$$

2.2. Distribuciones de probabilidad marginales

Una distribución marginal es la proyección de cierta distribución de probabilidad de más de una dimensión, en este caso en el plano complejo, sobre el eje *Re* o *Im*. La distribución de los posibles valores del vector Coeficiente de Reflexión viene dada por la información disponible tanto del módulo como de la fase del mismo. En la práctica se presentan principalmente los siguientes casos¹:

1. Se conoce el valor del módulo del Coeficiente de Reflexión. Se desconoce el valor de la fase
2. Se conoce el máximo valor posible del módulo del Coeficiente de Reflexión. Se desconoce el valor de la fase

2.2.1. Distribución Anillo Uniforme

En este caso se conoce el módulo del coeficiente de reflexión, $|\Gamma|$, pero se desconoce el valor de su fase, por lo que a la misma se la considera uniformemente distribuida (distribución rectangular). La forma de distribución de Γ es la de un anillo (*uniform ring*) centrado en el origen de coordenadas, donde la proyección en el eje *Re* e *Im* sigue una distribución de probabilidad marginal del tipo “*arcoseno*” cuya función de densidad es la llamada *Tipo U* como se ve en la Fig. 1.

Considerando que el radio del anillo es el módulo $|\Gamma|$, la varianza marginal de esta distribución es:

$$\sigma^2(\Gamma) = \frac{|\Gamma|^2}{2} \quad (8)$$

y la matriz covarianza de Γ es:

$$v(\Gamma) = \frac{|\Gamma|^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

2.2.2. Distribución Disco Uniforme

En este caso se conoce el máximo valor que puede tomar el módulo del coeficiente de reflexión, pero se desconoce su fase, por lo que el valor del vector Γ tiene igual probabilidad de situarse en cualquier punto dentro de un círculo de radio $|\Gamma|$ centrado en el origen. La forma de distribución

¹Se puede dar el caso de conocer tanto el módulo como la fase de Γ . Este caso se trata en la segunda parte del presente trabajo

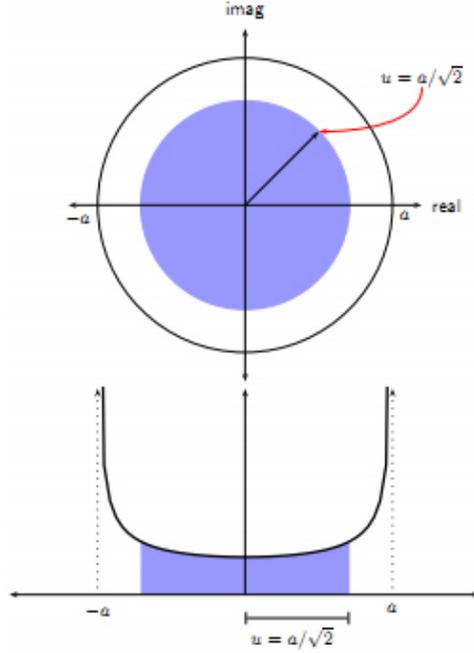


Figura 1: *Distribución de Probabilidad de $Re\{\Gamma\}$ cuando Γ varía según un Anillo [4]*

en este caso es la de un disco (*uniform disk*). La varianza de la distribución marginal de esta distribución es:

$$\sigma^2(\Gamma) = \frac{|\Gamma|^2}{4} \quad (10)$$

y la matriz covarianza de Γ es:

$$v(\Gamma) = \frac{|\Gamma|^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

2.3. Distribución de probabilidad del producto de vectores

Se demuestra en [4] que si dos vectores V_1 y V_2 tienen una distribución de probabilidad coincidentes con las presentadas en la sección 2.2, la varianza de la parte real, o marginal, del producto de estos vectores bidimensionales es igual a 2 veces el producto de las varianzas de las distribuciones marginales individuales:

$$\sigma^2[Re(V_1 V_2)] = 2 \sigma^2(V_1) \sigma^2(V_2) \quad (12)$$

Para nuestro caso, donde los vectores en (7) son los coeficientes de reflexión se tiene:

$$\sigma^2[Re(\Gamma_G \Gamma_L)] = 2 \sigma^2(\Gamma_G) \sigma^2(\Gamma_L) \quad (13)$$

2.3.1. Varianza de la incertidumbre por Mismatch

Según (7) tenemos que la varianza de la incertidumbre por Mismatch es:

$$\sigma^2(M) = 4 \sigma^2[Re(\Gamma_G \Gamma_L)] \quad (14)$$

y teniendo en cuenta la ecuación (13), queda:

$$\sigma^2(M) = 8 \sigma^2(\Gamma_G) \sigma^2(\Gamma_L) \quad (15)$$

3. Distribuciones de probabilidad del Mismatch

Según la información disponible sobre $|\Gamma_G|$ y $|\Gamma_L|$ se tienen distintas expresiones para las respectivas varianzas y por ende se tienen distintas distribuciones de probabilidad de la incertidumbre por Mismatch. A continuación se enumeran distintas posibilidades que se presentan en la práctica²:

1. Se conocen los valores del módulo de ambos coeficientes de reflexión
2. Se conoce el valor de un coeficiente de reflexión y el máximo especificado del segundo
3. Se conocen los máximos especificados del módulo de ambos coeficientes de reflexión

3.1. Distribución Anillo/Anillo

Si se conocen los módulos de los dos coeficientes de reflexión, Γ_G y Γ_L , se obtiene una distribución de probabilidad Tipo U. Entonces según (8) y (15) queda:

$$\sigma^2(M) = 8 \frac{|\Gamma_G|^2}{2} \frac{|\Gamma_L|^2}{2} = 2|\Gamma_G|^2 |\Gamma_L|^2 \quad (\text{varianza}) \quad (16)$$

$$\sigma(M) = \sqrt{2} |\Gamma_G| |\Gamma_L| \quad (\text{desvío standard 1-sigma}) \quad (17)$$

La distribución resultante del producto de ambos coeficientes es de la siguiente forma:

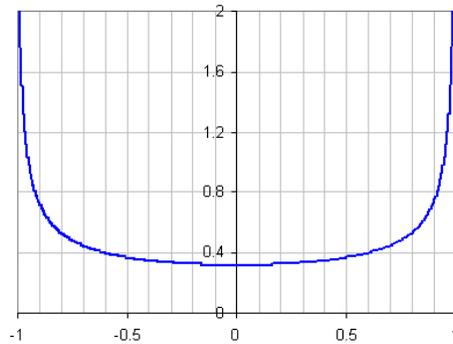


Figura 2: Distribución de probabilidad normalizada si se conocen los módulos de ambos Γ

²Se asume que no se tiene información respecto a $\phi(\Gamma)$ de ninguno de los dos vectores

3.2. Distribución Anillo/Disco

Si se conoce el valor máximo especificado del módulo de Γ_G y el valor del módulo de Γ_L o viceversa, entonces según (8), (10) y (15) queda (suponiendo máximo $|\Gamma_G|$ especificado):

$$\sigma^2(M) = 8 \frac{|\Gamma_G|^2}{4} \frac{|\Gamma_L|^2}{2} = |\Gamma_G|^2 |\Gamma_L|^2 \quad (\text{varianza}) \quad (18)$$

$$\sigma(M) = |\Gamma_G| |\Gamma_L| \quad (\text{desvío standard 1-sigma}) \quad (19)$$

La distribución tiene la forma indicada por la Fig. 3.

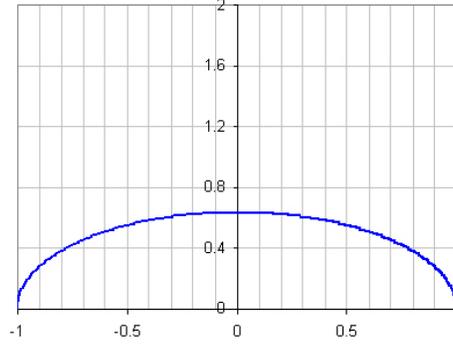


Figura 3: *Distribución de Probabilidad normalizada si se conoce el módulo de un solo Γ*

3.3. Distribución Disco/Disco

Si solo se conocen los valores máximos especificados de los módulos de ambos coeficientes de reflexión Γ_G y Γ_L , entonces según (10) y (15) queda:

$$\sigma^2(M) = 8 \frac{|\Gamma_G|^2}{4} \frac{|\Gamma_L|^2}{4} = \frac{1}{2} |\Gamma_G|^2 |\Gamma_L|^2 \quad (\text{varianza}) \quad (20)$$

$$\sigma(M) = \frac{1}{\sqrt{2}} |\Gamma_G| |\Gamma_L| \quad (\text{desvío standard 1-sigma}) \quad (21)$$

La distribución tiene la forma indicada por la Fig. 4.

4. Distribuciones de probabilidad del Mismatch en Transmisión

Cuando se mide la atenuación de un dispositivo de 2 puertos como se ve en la Fig. 7 aparecen desadaptaciones tanto en la entrada como en la salida del DUT. Aplicando la Regla de Mason al diagrama de flujo del esquema en cuestión, se llega a la siguiente expresión [3] que expresa el valor absoluto del error por Mismatch debido a estas desadaptaciones cuando se mide $|S_{21}|$:

$$M[dB] = 10 \times \log \left| \frac{(1 - \Gamma_G S_{11})(1 - \Gamma_L S_{22}) - \Gamma_G \Gamma_L S_{12} S_{21}}{1 - \Gamma_G \Gamma_L} \right|^2 \quad (22)$$

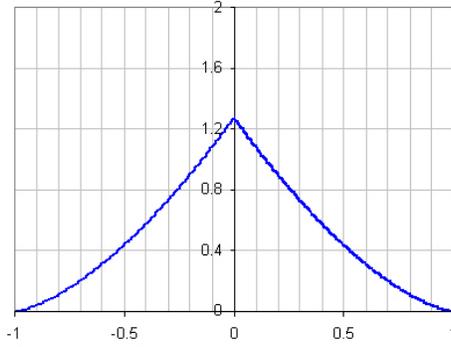


Figura 4: Distribución de probabilidad si se conocen los máximos valores de los módulos de ambos Γ

Asumiendo que el DUT es un dispositivo recíproco ($S_{21} = S_{12}$) y considerando que S_{11} y S_{22} son valores pequeños, operando se llega a que:

$$M[dB] = 10 \times \log \left| \underbrace{1 - \Gamma_G S_{11} - \Gamma_L S_{22} - S_{21}^2 \Gamma_G \Gamma_L + \Gamma_G \Gamma_L}_x \right|^2 \quad (23)$$

Si $x \approx 0$ se cumple que $|1 + x|^2 \approx 1 + 2 \operatorname{Re}\{x\}$:

$$M[dB] \approx 10 \times \log(1 + 2 \operatorname{Re}\{-\Gamma_G S_{11} - \Gamma_L S_{22} - S_{21}^2 \Gamma_G \Gamma_L + \Gamma_G \Gamma_L\}) \quad (24)$$

$$M[dB] \approx 4,34 \times \ln(1 + 2 \operatorname{Re}\{-\Gamma_G S_{11} - \Gamma_L S_{22} - S_{21}^2 \Gamma_G \Gamma_L + \Gamma_G \Gamma_L\}) \quad (25)$$

Teniendo en cuenta que si $x \approx 0$, $\ln(1 + 2x) \approx 2x$, queda:

$$M[dB] \approx 4,34 (-2 \operatorname{Re}\{\Gamma_G S_{11}\} - 2 \operatorname{Re}\{\Gamma_L S_{22}\} - 2 \operatorname{Re}\{S_{21}^2 \Gamma_G \Gamma_L\} + 2 \operatorname{Re}\{\Gamma_G \Gamma_L\}) \quad (26)$$

Se observa que cada término del segundo miembro tiene la forma de (7) y su varianza individual se calcula según (15). De la medición de atenuación se conoce el valor de $|S_{21}|$, por lo que puede asumirse que el término que incluye el lazo a través del DUT tiene la forma dada en (15) donde $|S_{21}|$ aparece como constante.

Finalmente:

$$\sigma_{M(dB)}^2 \approx (4,34)^2 [8 \sigma^2(\Gamma_G) \sigma^2(S_{11}) + 8 \sigma^2(\Gamma_L) \sigma^2(S_{22}) + 8 |S_{21}|^2 \sigma^2(\Gamma_G) \sigma^2(\Gamma_L) + 8 \sigma^2(\Gamma_G) \sigma^2(\Gamma_L)] \quad (27)$$

5. Resumen

A continuación se resumen los parámetros característicos de los distintos casos presentados:

Información	u(Mu)	Distribución	Tipo
$ \Gamma_G $ y $ \Gamma_L $	$\sqrt{2} \times \Gamma_G \times \Gamma_L $	Tipo-U	Anillo/Anillo
$ \Gamma_G $ y $ \Gamma_L _{max}$	$ \Gamma_G \times \Gamma_L $	-	Disco/Anillo
$ \Gamma_G _{max}$ y $ \Gamma_L _{max}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \Gamma_G \times \Gamma_L $	-	Disco/Disco

Cuadro 1: *Casos posibles - Incertidumbre standard por Mismatch*

6. Ejemplos

1. Medición del Nivel de Salida de un Generador de RF
2. Medición de Planicidad de un Analizador de Espectro
3. Medición de los parámetros S de un dispositivo de 2 puertos

6.1. Ejemplo 1. Generador de RF

En el caso de medir la potencia absoluta de salida de un Generador de RF como muestra la Fig. 5, se da la situación de tener enfrentados a Γ_G del Generador con Γ_L del Sensor de Potencia. En general la información que se conoce de Γ_G son las especificaciones de $|\Gamma_G|_{max}$ o ROE_{max} que brinda el fabricante mientras que el Γ_L puede ser medido por medio de un VNA³ para conocer tanto el módulo como la fase del Γ del sensor. De esta forma se tiene el caso presentado en la sección 3.2. Como ejemplo, supongamos tener los siguientes equipos en nuestro esquema de medición para medir la salida de un generador en 18 GHz :

- **Generador de RF**

Marca: Rohde & Schwarz

Modelo: SMR40

Especificación: $ROE < 2$

- **Sensor de Potencia**

Marca: Agilent

Modelo: E4412

Especificación: $ROE < 1,27$ (10 GHz a 18 GHz)

Datos de Certificado de Calibración: $|\Gamma_L| = 0,016$; $\phi(\Gamma_L) = 46^\circ$

³VNA: Vector Network Analyzer

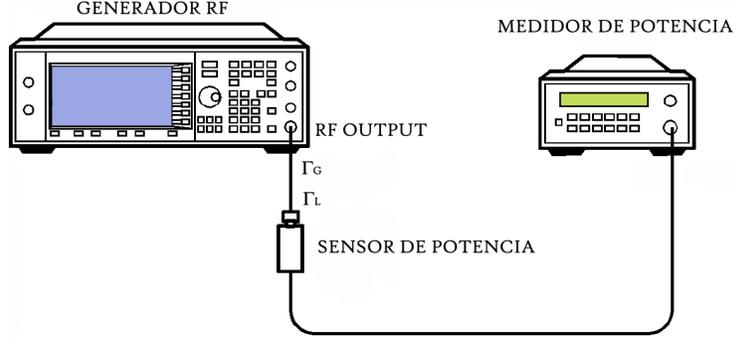


Figura 5: Medición del nivel de salida de un generador de RF

Según lo analizado anteriormente la incertidumbre por Mismatch (1-sigma) se calcula según el caso Anillo/Disco como se explica en la sección 3.2:

$$\text{ROE}_G = 2 \Rightarrow |\Gamma_G|_{\max} = 0,33 \quad (28)$$

$$|\Gamma_L| = 0,016 \quad (29)$$

$$u(M) = 0,33 \times 0,016 = 0,005 \quad (30)$$

Si en vez de utilizar los datos del certificado de calibración del sensor, se utiliza el dato informado por el fabricante, entonces la incertidumbre por Mismatch se comporta de acuerdo al caso Disco/Disco visto en la sección 3.3, entonces:

$$\text{ROE}_G = 2 \Rightarrow |\Gamma_G|_{\max} = 0,33 \quad (31)$$

$$\text{ROE}_L = 1,27 \Rightarrow |\Gamma_L|_{\max} = 0,12 \quad (32)$$

$$u(M) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0,33 \times 0,12 = 0,028 \quad (33)$$

Como se puede apreciar, en este caso el término por incertidumbre es aproximadamente 5 veces mayor si se usan las especificaciones aseguradas por el fabricante que si se extrae el valor del sensor de un certificado de calibración.

6.2. Ejemplo 2. Analizador de Espectro

En el caso de medir la exactitud de escala de un Analizador de Espectro (fidelidad), la señal que se inyecta al Analizador se nivela como se ve en la Fig. 6 . Por lo tanto el Γ_G que ve el Analizador de Espectro es el correspondiente al coeficiente de reflexión equivalente Γ_{eq} del divisor de potencia [5]. La forma de calcular el mismo es a través de la medición de los parámetros S del divisor de potencia y luego por medio de la ecuación (34), se obtiene el módulo y fase de Γ_{eq} . En este caso se considera que la salida hacia el DUT se conecta en el puerto 3 del divisor de potencia:

$$\Gamma_{eq} = \frac{S_{33} - (S_{13}S_{32})}{S_{12}} \quad (34)$$

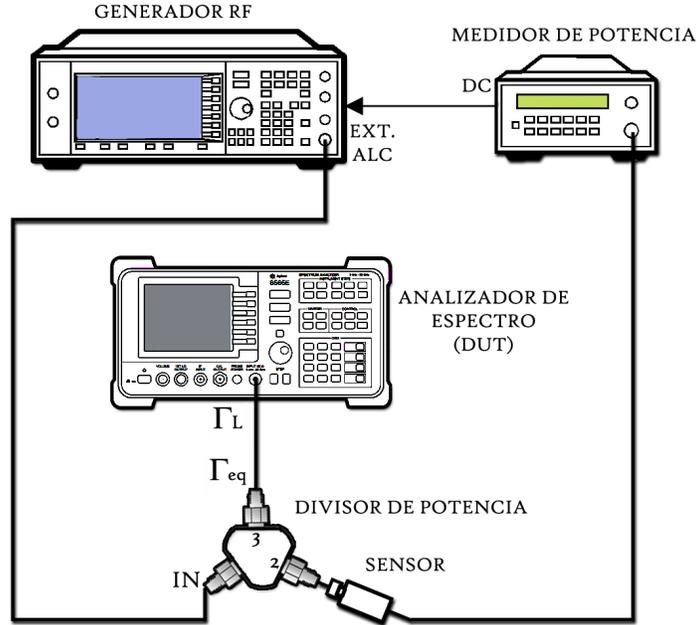


Figura 6: Esquema de medición de la Fidelidad de Escala de un analizador de espectro

Se conoce $|\Gamma_L|_{\max}$ o ROE_{\max} de la especificación del fabricante correspondiente al Analizador de Espectro, que indica un peor caso para el módulo de Γ_L pero no brinda información sobre su fase. En este caso también se tiene la combinación Anillo/Disco. Como ejemplo, supongamos tener los siguientes equipos en nuestro esquema de medición para medir el nivel de salida de un generador en 30 GHz:

- **Divisor de Potencia**

Marca: Agilent

Modelo: 11636C

Datos de Certificado de Calibración @30 GHz: $|\Gamma_{\text{equerto3}}| = 0,105$; $\phi(\Gamma_{\text{equerto3}}) = 94,8^\circ$

- **Analizador de Espectro**

Marca: Agilent

Modelo: E4448A PSA

Especificación: $\text{ROE} < 1,57$ (26,5 GHz a 50 GHz)

En este caso la incertidumbre por Mismatch (1-sigma) se calcula como sigue:

$$|\Gamma_G| = 0,105 \quad (35)$$

$$\text{ROE}_L = 1,57 \Rightarrow |\Gamma_L|_{\max} = 0,22 \quad (36)$$

$$u(M) = 0,105 \times 0,22 = 0,023 \quad (37)$$

6.3. Ejemplo 3. Atenuación

Se realiza la medición de atenuación de un dispositivo pasivo en 15 GHz, con un esquema de medición como se ve en la Fig. 7. Los equipos utilizados se indican a continuación:

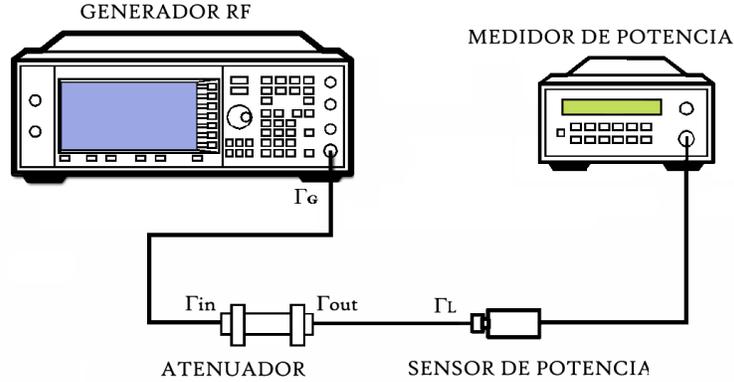


Figura 7: Esquema de medición de Atenuación

- **Generador de RF**

Marca: Rohde & Schwarz
 Modelo: SMR40
 Especificación: ROE < 2

- **Sensor de Potencia**

Marca: Agilent
 Modelo: E4412A
 Especificación: ROE < 1,27 (10 GHz a 18 GHz)
 Datos de Certificado de Calibración @15 GHz: $|\Gamma_L| = 0,020$; $\phi(\Gamma_L) = -65^\circ$

- **Atenuador Agilent 8491B - 30 dB**

$|S_{11}|_{15 \text{ GHz}} \leq 0,20$ (valor máximo especificado)
 $|S_{12}|_{15 \text{ GHz}} = 0,0311$ (valor medido)
 $|S_{21}|_{15 \text{ GHz}} = 0,0311$ (valor medido)
 $|S_{22}|_{15 \text{ GHz}} \leq 0,20$ (valor máximo especificado)

Utilizando la ecuación (27):

$$\sigma_{M(dB)}^2 \approx (4,343)^2 [8\sigma^2(\Gamma_G)\sigma^2(S_{11}) + 8\sigma^2(\Gamma_L)\sigma^2(S_{22}) + 8|S_{21}|^2\sigma^2(\Gamma_G)\sigma^2(\Gamma_L) + 8\sigma^2(\Gamma_G)\sigma^2(\Gamma_L)] \quad (38)$$

se ve que el primer término del segundo miembro coincide con el caso Disco/Disco:

$$8 \sigma^2(\Gamma_G)\sigma^2(S_{11}) = \frac{1}{2} \times 0,33^2 \times 0,20^2 = 2,18 \times 10^{-3} \quad (39)$$

En el caso del próximo término se tiene el caso Disco/Anillo:

$$8 \sigma^2(\Gamma_L)\sigma^2(S_{22}) = 0,020^2 \times 0,20^2 = 16,0 \times 10^{-6} \quad (40)$$

En el caso del término que incluye el lazo a través del DUT, se conoce el módulo y la fase de Γ_L , pero se desconoce $\phi(\Gamma_G)$. Se puede considerar que este caso es el Disco/Anillo:

$$8 |S_{21}|^2 \sigma^2(\Gamma_G)\sigma^2(\Gamma_L) = |S_{21}|^2 \times |\Gamma_G|^2 \times |\Gamma_L|^2 = 0,0311^2 \times 0,33^2 \times 0,020^2 \approx 0 \quad (41)$$

Por último se tiene:

$$8 \sigma^2(\Gamma_G)\sigma^2(\Gamma_L) = |\Gamma_G|^2 |\Gamma_L|^2 = 0,33^2 \times 0,020^2 = 43,610^{-6} \quad (42)$$

Sumando todas las contribuciones, queda:

$$\sigma^2(M) = (4,343)^2 \times (2,18 \times 10^{-3} + 16,0 \times 10^{-6} + 43,6 \times 10^{-6}) = 42,2 \times 10^{-3} \quad (43)$$

$$\sigma(M) = 0,205 \text{ (1-sigma) [dB]} \quad (44)$$

Referencias

- [1] Agilent (AN 1449-3): Fundamentals of RF and Microwave Power Measurements (Part 3), Apr 2011.
- [2] Harris, I.A.; Warner, F.L., “Re-examination of mismatch uncertainty when measuring microwave power and attenuation”, *Microwaves, Optics and Antennas, IEE Proceedings H* , vol.128, no.1, pp.35-41, Feb 1981.
- [3] Warner, F.L., “Microwave attenuation measurement”, (Peter Peregrinus, 1977) , chaps 2, 8 & 14.
- [4] Blair Hall: The uncertainty of a complex quantity with unknown phase, 33th ANAMET Meeting, May 2010.
- [5] Engen, G.F., “Amplitude Stabilization of a Microwave Signal Source”, *Microwave Theory and Techniques, IRE Transactions on* , vol.6, no.2, pp.202-206, Apr 1958.
- [6] Guldbrandsen, T., “Uncertainty contributions from mismatch in microwave measurements”, *Microwaves, Antennas and Propagation, IEE Proceedings -* , vol.148, no.6, pp.393-397, Dec 2001.
- [7] Blair Hall: Notes on complex measurement uncertainty - part 1, 53th ANAMET Report, Dec 2010.