

# COMPARACIÓN DE CRITERIOS PARA LA ESTIMACIÓN DEL FACTOR DE SENSIBILIDAD EN LA CALIBRACIÓN DE MASAS POR COMPARACIÓN

Fernando Kornblit, Juan Leiblich, Gerardo Minutti, Javier Barbagrigia  
 Instituto Nacional de Tecnología Industrial, (INTI - Argentina)  
 Tel: 54-11-47525402, Fax: 54-11-47134140, ferk@inti.gob.ar

**Resumen:** En la calibración de pesas por el ciclo de pesada ABBA, deben ser considerados los efectos asociados a la sensibilidad del comparador utilizado, y a su deriva lineal en el corto plazo. Para evaluar la sensibilidad, se adiciona una pesa de valor de masa conocido, y se corrige el resultado por un factor estimado de acuerdo a un diseño de cálculo preestablecido. El objetivo de este trabajo es comparar diseños alternativos, todos ellos asociados al modelo general ABBA, y derivar criterios para la selección de las pesas de sensibilidad, que minimicen o reduzcan convenientemente las incertidumbres

## 1. INTRODUCCIÓN

En la calibración de pesas o determinación de masas por comparación con pesas patrón de igual valor nominal, deben tenerse en cuenta los efectos asociados a la sensibilidad del comparador y a su deriva lineal en el corto plazo. Se suele emplear el ciclo ABBA, o de doble sustitución (donde, en general, las pesadas rotuladas "A" suelen corresponder a la pesa patrón y las rotuladas "B" a la incógnita). La diferencia de masas  $D$  se estima como:

$$D = \Delta_1 \cdot f \tag{1}$$

Donde

- $\Delta_i$  es la diferencia de indicaciones entre ambas masas, corregida por la deriva del comparador, y
- $f$  es el factor de sensibilidad alcanzado durante el ciclo de pesada, estimado como:

$$f = \frac{m_s}{\Delta_2} \tag{2}$$

Siendo

- $m_s$  la masa conocida de una carga adicionada, y
- $\Delta_2$  la diferencia de indicaciones entre pesadas con y sin la sobrecarga de valor  $m_s$ .

Un modo ampliamente utilizado de calcular  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ , al que nos referiremos aquí como opción 1, es el llamado método de Borda, recomendado en C,4,1, de [1], (ver también [2-5]), al que nos referiremos aquí como opción 1. Está basado en un ciclo de 4 pesadas, en las dos últimas de las cuales se agrega la sobrecarga (SC) de valor nominal  $m_s$ . Sintéticamente, se suele expresar como:

$$A \quad B \quad B+SC \quad A+SC.$$

Si  $\mathbf{I} = (i_1, i_2, i_3, i_4)^t$  es el vector de indicaciones correspondientes a un ciclo como el anterior, se aplica (1) y (2) con

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}(-i_1 + i_2 + i_3 - i_4), \quad \Delta_2 = (i_3 - i_2).$$

En virtud del alcance de este trabajo, no incluimos, en el modelo (1)-(2), componentes que sí deben ser tomados en cuenta al evaluar los resultados y la incertidumbre en una calibración o medición, como los asociados a la pesa patrón, al empuje del aire y los efectos de repetibilidad y/o excentricidad del comparador (para un análisis completo ver, por ejemplo, [1], [3], [4], [6]). Por otro lado, adoptaremos la simplificación consistente en considerar no significativa a la incertidumbre asociada a  $m_s$  (no ofrece dificultad adicional agregar este componente al análisis, en caso necesario) Llamando  $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(-1, 1, 1, -1)^t$ , y  $\mathbf{d} = (0, -1, 1, 0)^t$  a los vectores-columna que definen el diseño de la comparación, reformulamos las variables anteriores como:

$$\Delta_1 = \mathbf{c}^t \mathbf{I}; \quad \Delta_2 = \mathbf{d}^t \mathbf{I}, \tag{3}$$

Con lo que llegamos a la expresión vectorial:

$$D = \frac{\mathbf{c}^t \mathbf{I}}{\mathbf{d}^t \mathbf{I}} m_s \tag{4}$$

Buscamos establecer un modo de contrastar esta opción con otras variantes dentro del ciclo ABBA en general, y establecer criterios adecuados para la

selección de las pesas de sensibilidad en cada una de dichas variantes.

**1.1. Otros diseños**

Varios autores han estudiado diferentes diseños para optimizar en algún sentido las calibraciones de pesas. En [7] se muestra la conveniencia en general del ciclo de pesada ABBA por sobre otros.

En [8] se proponen algunas alternativas a la opción 1. Por ejemplo, es posible evitar que la deriva del comparador afecte la estimación de su sensibilidad si se utiliza el mismo  $c$  que en la opción 1, pero con  $d = \frac{1}{2} (1, -3, 3, -1)^t$ , (ver también [6]) Llamaremos opción 2 a esta última.

En el mismo trabajo se ofrece otra propuesta, a la que llamaremos opción 3, que permite obtener resultados válidos, aún cuando las diferencias de tiempo entre pesadas no sean constantes. Se trata del diseño de 5 indicaciones A B B+SC A+SC A, con  $c = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1, 0)^t$  y  $d = \frac{1}{2} (0 -1, 1, 1, -1)^t$ . (el factor  $\frac{1}{2}$  agregado en ambos vectores no afecta el cálculo de (4), pero permite que la estimación (2) resulte insesgada)

Finalmente, otra variante, aplicada en los laboratorios del INTI, a la que llamaremos opción 4, consiste en el diseño A B B A A+SC, con  $c = \frac{1}{2}(-1, 1, 1, -1, 0)^t$ , y  $d = (0, 0, 0, -1, 1)^t$

**Tabla 1. Síntesis de las 4 opciones presentadas**

Opción	Diseño del ciclo de pesada	c	d
1 Borda	A B B+SC A+SC	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2 Davis eq. (2) de [8]	A B B+SC A+SC	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
3 Davis eq. (5) de [8]	A B B+SC A+SC A	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4	A B B A A+SC	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
---	--------------	---	--

En la Tabla 1, se describen sintéticamente las 4 opciones presentadas, indicando el diseño de los ciclos de pesada en cada opción, y los correspondientes vectores  $c$  y  $d$

**2. INCERTIDUMBRE ASOCIADA A D**

Utilizando un enfoque vectorial, como el propuesto en 6.2. de [9] para  $m = 1$ , expresamos el vector de los coeficientes de sensibilidad de  $D$  con respecto a las indicaciones, como:

$$\frac{\partial D}{\partial \mathbf{I}} = \frac{(\mathbf{d}^t \mathbf{I}) \mathbf{c} - (\mathbf{c}^t \mathbf{I}) \mathbf{d}}{(\mathbf{d}^t \mathbf{I})^2} m_s = \frac{(\mathbf{d} \mathbf{c}^t - \mathbf{c} \mathbf{d}^t) \mathbf{I}}{(\mathbf{d}^t \mathbf{I})^2} m_s$$

Con lo cual, la incertidumbre asociada a  $D$  cumple

$$u_D^2 = \frac{\mathbf{I}^t \mathbf{M} \mathbf{I}}{(\mathbf{d}^t \mathbf{I})^4} m_s^2 \tag{6}$$

donde  $\mathbf{M} = (\mathbf{c} \mathbf{d}^t - \mathbf{d} \mathbf{c}^t) \Sigma_I (\mathbf{d} \mathbf{c}^t - \mathbf{c} \mathbf{d}^t)$  y  $\Sigma_I$  es la matriz de covarianza asociada a las indicaciones.

**2.1. Indicaciones no correlacionadas:**

Se suele asumir que las indicaciones no están correlacionadas entre sí, y asignar la misma incertidumbre estándar  $u_{ind}$  a cada una de ellas. Una asignación razonable es  $u_{ind} = 1/\sqrt{12}$  (expresada en divisiones del indicador, no en unidades de masa). Así,  $\Sigma_I$  resulta un múltiplo de la matriz identidad, y

$$u_D^2 = \frac{\mathbf{I}^t (\mathbf{c} \mathbf{d}^t - \mathbf{d} \mathbf{c}^t) (\mathbf{d} \mathbf{c}^t - \mathbf{c} \mathbf{d}^t) \mathbf{I}}{(\mathbf{d}^t \mathbf{I})^4} m_s^2 u_{ind}^2 = \frac{\mathbf{I}^t \mathbf{c} \mathbf{d}^t \mathbf{d} \mathbf{c}^t \mathbf{I} - 2 \mathbf{I}^t \mathbf{c} \mathbf{d}^t \mathbf{c} \mathbf{d}^t \mathbf{I} + \mathbf{I}^t \mathbf{d} \mathbf{c}^t \mathbf{c} \mathbf{d}^t \mathbf{I}}{(\mathbf{d}^t \mathbf{I})^4} \cdot m_s^2 \cdot u_{ind}^2 =$$

Y, en virtud de (3)

$$u_D^2 = \frac{\Delta_1^2 \mathbf{d}^t \mathbf{d} - 2 \Delta_1 \Delta_2 \mathbf{c}^t \mathbf{d} + \Delta_2^2 \mathbf{c}^t \mathbf{c}}{\Delta_2^4} \cdot m_s^2 \cdot u_{ind}^2 =$$

$$= \left[ \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right)^2 \mathbf{d}^t \mathbf{d} - 2 \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right) \mathbf{c}^t \mathbf{d} + \mathbf{c}^t \mathbf{c} \right] \cdot \frac{m_s^2}{\Delta_2^2} \cdot u_{ind}^2 = \quad (7)$$

$$= \left\| \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{c} \right\|^2 \cdot (f u_{ind})^2$$

donde  $\|\cdot\|$  representa la norma euclídeana, y la constante  $f u_{ind}$  puede interpretarse como la incertidumbre asociada a las indicaciones, expresada, no en divisiones del indicador, sino en unidades de masa.

Un modo alternativo para deducir (7) es aplicar la Ley de Propagación de Incertidumbres [10] en forma escalar a partir de (1) y (2), considerando como componentes de entrada a  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ :

$$u_D^2 = \left( \frac{\partial D}{\partial \Delta_1} \right)^2 u_{\Delta_1}^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial \Delta_2} \right)^2 u_{\Delta_2}^2 + 2 \frac{\partial D}{\partial \Delta_1} \frac{\partial D}{\partial \Delta_2} \text{corr}(\Delta_1; \Delta_2) u_{\Delta_1} u_{\Delta_2} \quad (8)$$

con:

$$u_{\Delta_1} = \sqrt{\sum_j c_j^2} u_{ind} = \|\mathbf{c}\| u_{ind},$$

y el cálculo para  $u_{\Delta_2}$  es análogo. Además, por (3), la covarianza entre ambas variables es:

$$\text{cov}(\Delta_1, \Delta_2) = \sum_{j,k} c_j d_k \text{cov}(i_j, i_k) = \mathbf{c}^t \mathbf{d} u_{ind}^2 = \langle \mathbf{c}; \mathbf{d} \rangle u_{ind}^2$$

(donde  $\langle \mathbf{c}; \mathbf{d} \rangle = \mathbf{c}^t \mathbf{d}$  indica el producto escalar entre ambos vectores). Por lo tanto, el coeficiente de correlación en (8) es:

$$\text{corr}(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\text{cov}(\Delta_1, \Delta_2)}{u_{\Delta_1} u_{\Delta_2}} = \frac{\langle \mathbf{c}; \mathbf{d} \rangle}{\|\mathbf{c}\| \|\mathbf{d}\|}$$

y se obtiene (7) reemplazando las incertidumbres y la correlación (8). La correlación es igual al coseno del ángulo formado por  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{d}$ . Si estos vectores son ortogonales entre sí, como ocurre en las opciones **1** y **2**, las estimaciones de la deriva y de la sensibilidad resultan no correlacionadas, tal como se indica en el apartado 7 de [11]. En cambio, si  $\langle \mathbf{c}; \mathbf{d} \rangle > 0$ , el término cruzado en (8) se vuelve negativo. Esto significa que los errores asociados a

ambas estimaciones se compensan parcialmente en el cociente (4), obteniendo un menor valor para  $u_D$ .

Una vez expresada  $u_D$  en términos de  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{d}$ , podemos plantear el problema siguiente: para una dada opción de diseño (o sea, para  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{d}$  dados): deseamos elegir el valor nominal de la pesa de sensibilidad, para minimizar o reducir (7), lo cual es equivalente a minimizar o reducir  $\|(\Delta_1/\Delta_2) \mathbf{d} - \mathbf{c}\|$

Puede asumirse que  $\Delta_1$  depende de la diferencia real de masas entre patrón e incógnita, y por tanto es un valor fijo. En rigor,  $\Delta_1$  podría ser reducida a valores cercanos a 0, si se agrega, junto a la pesa de menor valor, otras pesas suplementarias de valores más pequeños, tendiendo a equilibrar las indicaciones del patrón y la incógnita. Sin embargo, este procedimiento de adición de pesas aumenta el tiempo necesariamente insumido en cada ciclo, lo que, en general se desea evitar.

Así, el problema planteado resulta: para  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$ , y  $\Delta_1$  dados, elegir adecuadamente la pesa de sensibilidad (y en consecuencia el valor de  $\Delta_2$ ), que minimice  $\|(\Delta_1/\Delta_2) \mathbf{d} - \mathbf{c}\|$  o lo reduzca a valores razonables.

El caso en que  $\langle \mathbf{c}; \mathbf{d} \rangle = 0$ , se presenta en 2.1.1., y el caso  $\langle \mathbf{c}; \mathbf{d} \rangle \neq 0$  en 2.1.2.

### 2.1.1. Diseños con $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ ortogonales

Si  $\langle \mathbf{c}; \mathbf{d} \rangle = 0$ , de (7) se deriva:

$$u_D^2 = \left[ \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right)^2 \|\mathbf{d}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 \right] (f u_{ind})^2$$

Esta expresión se reduce al aumentar  $\Delta_2$ . Sin embargo, la selección de una sobrecarga con masa demasiado alta puede forzar a utilizar el comparador en un rango de pesada extenso, donde su linealidad pueda verse afectada, y por lo tanto distorsionada la estimación de su sensibilidad. Por lo tanto, es conveniente establecer un valor de  $\Delta_2$  sólo lo suficientemente alto para que  $u_D$  no resulte significativamente mayor que su cota inferior  $\|\mathbf{c}\| f u_{ind}$ . Por ejemplo, un criterio aplicable, puede ser es el que asegure que:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \|\mathbf{d}\| < \frac{\|\mathbf{c}\|}{3}$$

Con lo que  $u_D$  sólo resulta  $\sqrt{1/9+1}$  veces su cota inferior (un 5% mayor que ella).

En la opción 1,  $\|c\|=1; \|d\|=\sqrt{2}$ , y la relación anterior se alcanza si  $\Delta_2 > 3\sqrt{2}\Delta_1 \approx 5\Delta_1$ , con lo que

$$u_D = 1,07 f u_{ind}$$

En la opción 2 se utiliza el mismo  $c$  que en la 1, y  $\|d\|=\sqrt{5}$ , y la relación se alcanza cuando  $\Delta_2 > 3\sqrt{5}\Delta_1 \approx 7\Delta_1$ , con lo que

$$u_D = 1,05 f u_{ind}$$

### 2.1.2. Diseños con $c$ y $d$ no ortogonales

Si, en cambio,  $c$  y  $d$  no son ortogonales, es posible alcanzar un valor óptimo para  $\Delta_2$

$\|(\Delta_1/\Delta_2)d - c\|$  se minimiza al elegir  $\Delta_2$  de forma tal que la proyección ortogonal del vector  $c$  sobre la recta generada por el vector  $d$  coincida con  $(\Delta_1/\Delta_2)d$ , tal como se representa en la Fig.1.

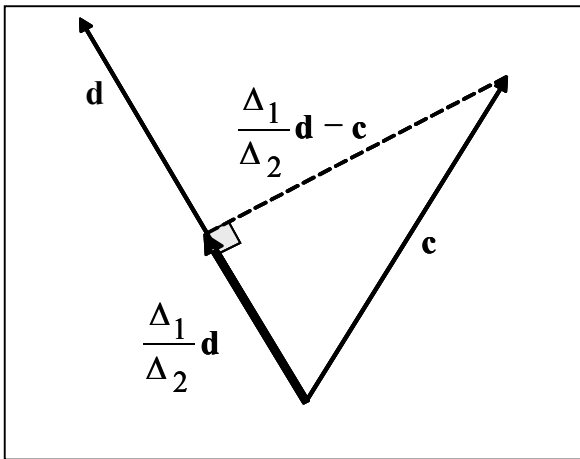


Fig. 1. Elección de  $\Delta_2$  que minimiza  $u_D$

Esto significa que  $\langle (\Delta_1/\Delta_2)d - c; (\Delta_1/\Delta_2)d \rangle = 0$ , o, escrito de otro modo:

$$\Delta_2 = \frac{\langle d; d \rangle}{\langle c; d \rangle} \cdot \Delta_1$$

Con lo que se llega al valor óptimo:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\Delta_1}{\Delta_2} d - c \right\|^2 &= \|c\|^2 - \frac{\langle c; d \rangle^2}{\|d\|^2} = \|c\|^2 \left( 1 - \frac{\langle c; d \rangle^2}{\|c\|^2 \|d\|^2} \right) = \\ &= \|c\|^2 (1 - \cos^2(\overline{cd})) = \|c\|^2 \text{sen}^2(\overline{cd}) \end{aligned}$$

donde llamamos  $\overline{cd}$  al ángulo formado por ambos vectores. La mínima incertidumbre resulta

$$u_{Dmin} = \|c\| \text{sen}(\overline{cd}) f m_s$$

En la opción 3,  $\langle d; d \rangle = 4; \langle c; d \rangle = 1$ ; y la condición óptima es la ya indicada en la tabla 3 de [8]:

$$\Delta_2 = 4\Delta_1 \tag{10}$$

Con esta opción, se llega a

$$u_{Dmin} = 0,97 f u_{ind}$$

En la opción 4,  $\langle d; d \rangle = 2; \langle c; d \rangle = 1/2$ . Con esto, se llega a nuevamente a (10), y a

$$u_{Dmin} = 0,94 f u_{ind}$$

En ambas opciones, sin embargo, es posible aplicar aún menores sobrecargas que, si bien no realizan el valor óptimo, no incrementan significativamente  $u_D$  respecto de dicho óptimo. Por ejemplo, si en cualquiera de las dos opciones se aplica una sobrecarga tal que  $\Delta_2 = 2\Delta_1$ , se llega a

$$u_D = 1 f u_{ind}$$

### 2.2. Indicaciones correlacionadas

La asunción de no correlación entre indicaciones no es necesariamente cierta en todos los casos. Por ejemplo, si el comparador es altamente repetible y estable durante el ciclo de pesada, es razonable suponer una alta correlación entre la primera y quinta indicación en las opciones 3 y 4, dado que la carga nominal en estas indicaciones es la misma, y en consecuencia el error de redondeo debería ser similar. La matriz de covarianza depende entonces del coeficiente de correlación  $r_{15}$  entre ambas indicaciones:

$$\Sigma_I = u_{ind}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ r_{15} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A falta de una estimación fiable de  $r_{15}$ , es razonable asignar un valor 1 a dicho coeficiente, con lo cual, si se aplica (4), y se selecciona la pesa de sensibilidad según (10), se obtiene, respectivamente, para las opciones 3 y 4:

$$M = \frac{u_{ind}^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; y$$

$$M = \frac{u_{ind}^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

con lo cual, en la opción 3, resulta

$$u_D = 1.03 f u_{ind}$$

y en la opción 4,

$$u_D = 1.06 f u_{ind}.$$

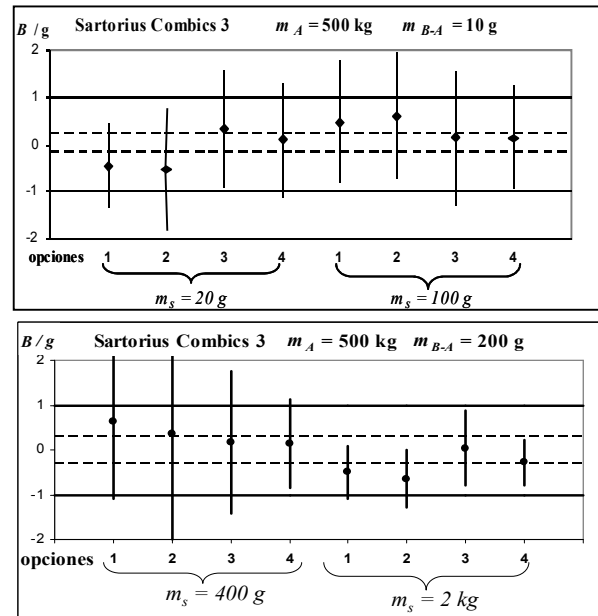
### 3. RESULTADOS

Las 4 opciones mencionadas fueron ensayadas en 2 comparadores de masa de diferentes características, simulando calibraciones de pesas de valor nominal  $m_A$ :

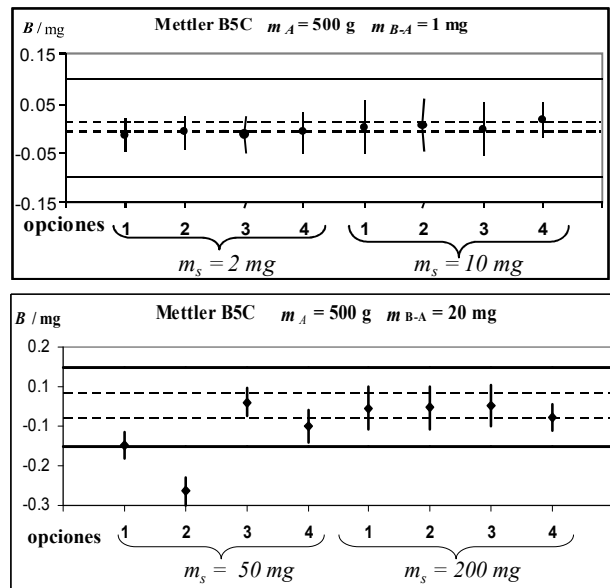
- **SARTORIUS Combics 3**,  $Máx = 1500$  kg,  $d = 1$ g.  $m_A = 500$  kg
- Balanza mecánica **METTLER B5C**,  $Máx = 1$  kg,  $d = 0,1$  mg,  $m_A = 500$  g

Las pesadas “A” fueron efectuadas aplicando una pesa de valor nominal  $m_A$ , y las pesadas “B”, adicionando a ésta otra pesa de masa conocida  $m_{B-A}$ . Se trabajó con dos valores de  $m_{B-A}$  en cada comparador: uno del orden de  $10 d$ , y el otro del orden de  $200d$ . Además, en cada caso, se utilizaron pesas de sensibilidad de dos valores nominales: cercanos a  $2 m_{B-A}$  y a  $10 m_{B-A}$ .

Con cada diseño, se repitieron 10 ciclos de comparación, y se calculó el sesgo medio  $B$  (promedio de los ciclos menos el valor de  $m_{B-A}$ ) y las desviaciones estándar  $s$ . Finalmente, se grafican los intervalos  $B \pm 2s/\sqrt{10}$ . Las líneas de puntos en los gráficos representan la incertidumbre expandida asignada a  $m_{B-A}$  y las líneas llenas representan  $\pm d$



Figs. 2 y 3. Calibración de una pesa de 500 kg



Figs. 4 y 5. Calibración de una pesa de 500 g

#### 4. DISCUSIÓN

Los resultados del punto 3 son consistentes con las incertidumbres alcanzadas en el punto 2, si se tienen en cuenta los efectos de repetibilidad y excentricidad, no contemplados en 2.

Para diferencias de masa pequeñas ( $m_{B-A} = 10 d$ ), no parece observarse demasiada discrepancia entre las dos selecciones de  $m_s$ . En cambio, para  $m_{B-A} = 200 d$ , la elección de  $m_s = 2 m_{B-A}$  da peores resultados en las opciones 1 y 2, tal como es esperable de acuerdo a 2.1.1. En el comparador Sartorius aumenta la dispersión, y en el comparador mecánico Mettler parecen surgir efectos sistemáticos mayores.

De acuerdo a las relaciones propuestas en 2.1.1. y 2.1.2., la selección adecuada de  $m_s$  (y en consecuencia de  $\Delta_2$ ) depende básicamente de la diferencia de masa entre patrón e incógnita ( $\Delta_1$ ). Sin embargo, para bajos valores de  $\Delta_1$ , el valor de  $\Delta_2$  puede resultar pequeño en relación a la resolución del comparador, y en consecuencia la estimación de  $f$  puede verse afectada por errores de discretización. Este puede ser el motivo de algunos efectos aleatorios o sistemáticos observados.

Por otro lado, observamos que, de acuerdo a 2.1.,  $u_D$  se reduce al trabajar con diseños no ortogonales, en los cuales el signo del producto escalar  $\langle c; d \rangle$  sea igual al de  $\Delta_1$ , de forma tal que el término cruzado de correlación se vuelva negativo. En las opciones 3 y 4, esto implica  $\Delta_1 > 0$ . En consecuencia, se puede proponer la siguiente mejora al aplicar estas opciones: realizar un ciclo de pesada preliminar sólo para determinar el signo de  $\Delta_1$ . Si éste resulta negativo, intercambiar las posiciones entre el patrón la incógnita. En otras palabras, la aplicación de un ciclo BAAB en lugar de ABBA redundaría en una menor incertidumbre en estas opciones.

Además, en la opción 4, la masa de sensibilidad se aplica sólo sobre la pesa de menor valor (A), y por lo tanto la sensibilidad es estimada sobre el mismo rango de trabajo en que se pesa la diferencia B-A. Esto puede ser una ventaja en comparadores con baja linealidad. En cambio, en comparadores con derivas importantes (por ejemplo, balanzas mecánicas), sigue siendo conveniente la opción 2. En cualquiera de las opciones descritas, puede estimarse la deriva a partir de las indicaciones.

#### 5. CONCLUSIONES

El enfoque planteado en este trabajo permite justificar la selección de una pesa de sensibilidad en cada opción, y asignar las incertidumbres asociadas a  $D$ , teniendo en cuenta, si correspondiere, las correlaciones entre algunas de las indicaciones. En particular, los criterios obtenidos en 2.1.1 y 2.1.2 resultan adecuados para las cuatro opciones analizadas.

Además, los resultados mostrados en 2.2 sugieren que la existencia de correlaciones entre indicaciones no afecta significativamente las incertidumbres finales.

Por otra parte, la adopción de un modelo general para la expresión de  $u_D$  permite comparar los diferentes diseños entre sí, paso previo para la selección de la opción más adecuada, de acuerdo a las características del comparador utilizado.

Más allá de que los resultados experimentales mostrados en 3 sean consistentes con los cálculos de los puntos anteriores, dichos resultados deben ser considerados como preliminares. Resultaría conveniente ensayar, desde esta perspectiva, una mayor variedad de comparadores, de diversas características, a fin de establecer conclusiones más definitivas.

Por último, el modelo planteado puede también aplicarse para estudiar, la conveniencia o no, de utilizar pesas de sensibilidad en cada situación particular, por ejemplo, en calibraciones de pesas de clase E1 o E2 utilizando comparadores de alta exactitud. Puede suponerse que estos comparadores son lo suficientemente lineales en el intervalo de pesada, y estables durante el ciclo efectuado, como para que se vuelva innecesaria la utilización de pesas de sensibilidad. Sin embargo, dicha suposición debería ser validada en algunos casos. Para esta validación, puede partirse de (7), y comparar el valor de  $u_D$  obtenido, con el que se obtendría, sin la aplicación de una pesa de sensibilidad.

#### RECONOCIMIENTO

El presente trabajo fue realizado a partir de una observación efectuada por Walter Bich, miembro del INRIM, durante una *peer review* realizada a los laboratorios nacionales del INTI en Diciembre de 2009 [12]. El evaluador recomendó establecer y documentar un criterio para la selección de pesas de sensibilidad y, por otro lado, comparar el diseño aplicado en el INTI con otros usualmente aplicados. Las primeras ideas que condujeron finalmente a

este trabajo surgieron en las fructíferas conversaciones mantenidas con él.

## REFERENCIAS

- [1] International Recommendation OIML R 111-1 "Weights of classes E1, E2, F1, F2, M1-2, M2, M2-3 and M3, Part 1, Metrological and technical requirements", 2004
- [2] NIST GMP 14, *Good Measurement Practice, for the Selection and Use of Sensitivity Weights in Weighing Procedures*, 2003
- [3] Davidson, S., Perkin, M., Buckley, M., *Measurement Good Practice No. 71: The Measurement of Mass and Weight*, NPL, 2004
- [4] Becerra Santiago, L.O., Nava Martínez, J. *Incertidumbre en la calibración de pesas por el método ABBA, publicación del CENAM*, 2004
- [5] Jones, F., Schoonover, R.M., *Handbook of Mass Measurement*, CRC Press, 2002
- [6] Schwartz, R., Borys, M., Scholz, F. *Guide to Mass Determination with High Accuracy*, PTB Bericht, PTB-MA-80e, Braunschweig, March 2007
- [7] Gläser, M., *Cycles of comparison measurements, uncertainties and efficiencies*, Meas. Sci. Technol. 11 (2000), [iopscience.iop.org/0957-2333/11/1/303](http://iopscience.iop.org/0957-2333/11/1/303)
- [8] Davis, R.S., *Note on the Choice of a Sensitivity Weight*, Journal of Research of the National Bureau of Standards, May-June 1987
- [9] JCGM 102: 2009, *Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement – Models with any number of output quantities (Draft)*, JCGM, WG 1
- [10] JCGM 100: 2008 *Evaluation of measurement data. Guide to the expression of uncertainty in measurement*, JCGM, WG 1, available in [www.bipm.org/en/publications/guides/gum.htm](http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.htm)
- [11] Bich, W., Cox, M., Harris, P., *Uncertainty Modelling in Mass Comparisons*, *Metrologia*, 1993/94, **30**, 495-502
- [12] Bich, W. *Peer review for mass and volume Calibration and Measurement Capabilities of INTI; Argentina, Final Report*, 2009.