



ISSN 1850-2512 (impreso)
ISSN 1850-2547 (en línea)

UNIVERSIDAD DE BELGRANO

Documentos de Trabajo

Facultad de Ingeniería

**Aberrometrías oculares y de otros sistemas
ópticos: transformación de coeficientes Zernike
al contraer y desplazar transversalmente la
pupila.**

N° 208

Silvia A. Comastri¹, Karina Bastida²,
Gabriel Martín³, Arturo Bianchetti⁴

Departamento de Investigaciones
Febrero 2008

Universidad de Belgrano
Zabala 1837 (C1426DQ6)
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina
Tel.: 011-4788-5400 int. 2533
e-mail: invest@ub.edu.ar
url: <http://www.ub.edu.ar/investigaciones>

1. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas; Grupo de Óptica y Visión-Facultad de Ingeniería-Universidad de Buenos Aires; Facultad de Ingeniería-Universidad de Belgrano-Buenos Aires
2. Departamento de Física y Metrología-Instituto Nacional de Tecnología Industrial-Argentina; Grupo de Óptica y Visión-Facultad de Ingeniería-Universidad de Buenos Aires
3. Reichert Inc-USA; Grupo de Óptica y Visión-Facultad de Ingeniería-Universidad de Buenos Aires
4. Dirección de Tecnología-Telefónica Móviles de Argentina; Facultad de Ingeniería-Universidad de Buenos Aires

Para citar este documento:

Comastri, Silvia A., Bastida, Karina; Martin, Gabriel; Bianchetti, Arturo (2008). Aberrometrías oculares y de otros sistemas ópticos: transformación de coeficientes Zernicke al contraer y desplazar transversalmente la pupila. Documento de Trabajo N° 208, Universidad de Belgrano.

Disponible en la red: http://www.ub.edu.ar/investigaciones/dt_nuevos/208_comastri.pdf

Palabras clave: aberrometría, variación de pupila, calidad visual
Artículo escrito para la Universidad de Belgrano (2008)

Email: scomastri18@yahoo.com

Resumen

La calidad de las imágenes que proporciona un sistema óptico formador de imágenes cualquiera y el ojo en particular, está afectada por aberraciones las cuales suelen cuantificarse desarrollando la función aberración del frente de ondas en polinomios Zernike. Los coeficientes de este desarrollo, para un dado punto objeto y para un dado centro y tamaño pupilar, son característicos del sistema. En el presente trabajo se escriben las fórmulas analíticas explícitas para los coeficientes Zernike de hasta 4^{to} orden que corresponden a una pupila en términos de los correspondientes a otra para la cual se han evaluado por trazado de rayos los coeficientes de hasta 7^o orden. Para ejemplificar el uso de estas fórmulas, se muestran dos aplicaciones, el cálculo de coeficientes nuevos correspondientes a la córnea de un sujeto cuyas aberraciones dominantes son astigmatismo de 2^{do} orden y trifolio de 3^{er} orden y a un sistema óptico que originalmente solo tiene aberración esférica de 4^{to} orden.

Abstract

The quality of the images supplied by any image forming system and in particular by the eye, is affected by aberrations which are frequently quantified expanding the wavefront aberration function in Zernike polynomials. The coefficients of this expansion, for a given object point and for a given centre and size of the pupil, are characteristic of the system. In the present article, analytical explicit formulas for Zernike coefficients of up to 4th order corresponding to a pupil in terms of those corresponding to another pupil for which coefficients of up to 7th order are evaluated via ray tracing, are written. To exemplify the use of these formulas, two applications are shown, the calculation of new coefficients corresponding to the cornea of a subject whose dominant aberrations are 2nd order astigmatism and 3rd order trefoil and to an optical system which originally only has 4th order spherical aberration.

1. Introducción

La calidad de las imágenes que proporciona un sistema óptico formador de imágenes cualquiera (por ejemplo microscopio, telescopio astronómico, etc.), y en particular el ojo, está generalmente afectada por aberraciones ya que, aún dejando de lado la difracción, no todos los rayos provenientes de un punto objeto pasan por un único punto a la salida. Como se trató en un Documento de Trabajo previo¹, las aberraciones suelen cuantificarse mediante la función aberración del frente de ondas^{2,3}, W , que es el camino óptico a lo largo de un rayo proveniente de un punto objeto desde el frente de ondas ideal al real cuando la luz emerge del sistema (Figura 1 (a)). Adicionalmente, no todos los rayos provenientes de un punto objeto, pasan por el sistema óptico. De acuerdo con Óptica Geométrica Paraxial², el haz de rayos está limitado, a la entrada, por la pupila de entrada (que es la imagen del diafragma de apertura en el espacio objeto) y, a la salida, por la pupila de salida (que es la imagen del diafragma de apertura en el espacio imagen). En la pupila de salida se definen (Figura 1 (b)) coordenadas cartesianas (X, Y) y, si la pupila es circular de radio a , coordenadas polares normalizadas¹ (ρ, θ) siendo $\rho \cos(\theta) = X/a$ y $\rho \sin(\theta) = Y/a$ (si la pupila es elíptica, en vez de a , se consideran sus ejes menor y mayor). Las coordenadas (ρ, θ) permiten considerar una pupila de salida circular de radio unidad independientemente de cual sea el valor de a . Como la función aberración depende del rayo considerado, para un dado punto objeto, es función de (ρ, θ) , es decir $W = W(\rho, \theta)$. En el caso del ojo⁴⁻⁹ (Figura 1 (c)), el diafragma de apertura es el diafragma de iris; la pupila de entrada es su imagen a través de la córnea (la cual suele denominarse simplemente "pupila" y es el círculo negro que se ve al mirar un ojo) y las aberraciones de interés son las de la córnea, las del cristalino y/o las del ojo completo. En jóvenes normales hay un mecanismo de compensación entre las aberraciones de córnea y cristalino que se degrada con la edad y/o las patologías¹⁰.

El análisis de la aberración del frente de ondas suele simplificarse considerando un punto objeto fijo y descomponiendo $W(\rho, \theta)$ en aberraciones básicas, cada una correspondiendo a un polinomio o modo

Zernike de cierto orden n . Para evaluar los coeficientes de este desarrollo adecuadamente, además de considerar el radio pupilar y utilizar coordenadas polares normalizadas (ρ, θ) , es necesario tener en cuenta el punto considerado como centro pupilar. La ubicación de este punto para un dado sistema no siempre se conoce a priori, por ejemplo en el caso del ojo, el centro geométrico de la pupila referida al vértice corneal¹¹ es diferente para distintos sujetos y puede cambiar en condiciones de midriasis¹². Si el sistema óptico, el objeto y la pupila son fijos, el conjunto de coeficientes Zernike (frecuentemente representado como un gráfico de barras), puede considerarse como la aberrometría del sistema y lo caracteriza unívocamente. La utilización de polinomios Zernike para analizar aberraciones, que es tradicional en Óptica^{2,3}, se ha aplicado al ojo en las últimas 5 décadas⁴⁻¹⁸ aunque, a diferencia de muchos sistemas ópticos, al ser el ojo un sistema fisiológico, suele no ser estable en el tiempo. Se han desarrollado, por un lado, topógrafos que evalúan aberraciones corneales y aberrómetros oculares¹¹ y, por otro lado, oftalmoscopios de barrido o tomógrafos de coherencia óptica (OCT) que tienen en cuenta aberraciones en tiempo real^{10,19}. Los 2 primeros dispositivos determinan objetivamente y en un breve intervalo de tiempo, las aberraciones de orden superior lo cual es de utilidad¹⁰ en casos patológicos tales como queratocono, post-LASIK, trasplante corneal, etc. permitiendo guiar y controlar la cirugía refractiva; la implantación de lentes intraoculares personalizadas y la fabricación de lentes de contacto que corrigen aberraciones convencionales o no. En los 2 últimos dispositivos, actualmente se contempla la posibilidad de variación del sistema ocular con el tiempo incorporando óptica adaptativa lo cual permite, por ejemplo, estudiar los fotorreceptores retinianos con extraordinaria resolución¹⁰.

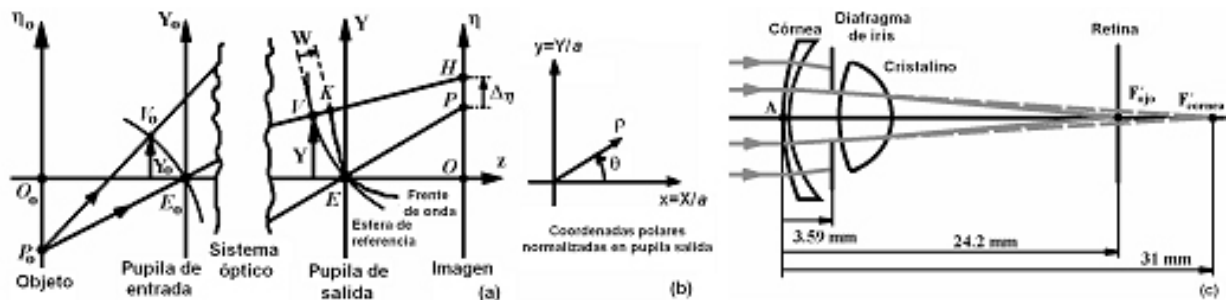


Figura 1. (a) Aberraciones y pupilas en un sistema óptico arbitrario: P_o y P son un punto objeto y su imagen ideal; (X_o, Y_o) y (X, Y) son coordenadas en las esferas de referencia de la pupila de entrada (y salida); $W=[VK]$ es la aberración del frente de ondas; $\Delta\eta = PH$ es la aberración transversal. (b) Coordenadas polares normalizadas en una pupila de salida circular de radio a . (c) Sistema óptico ocular: córnea, diafragma de iris y cristalino (distancias según ojo de Le Grand)

En muchos casos se evalúa por trazado de rayos el conjunto de coeficientes Zernike que corresponde a un dado tamaño y centro pupilar y se necesita conocer el conjunto correspondiente a otra pupila. Varios autores han desarrollado métodos analíticos o algebraicos para realizar esta transformación. Por ejemplo Guirao et al¹³ consideran descentrado y rotación de la pupila sin escaleo; J.Schwiegerling¹⁴ y Campbell¹⁵ consideran escaleo sin descentrado ni rotación y Bara et al¹⁶ describen un método algebraico para convertir coeficientes para cualquier pupila escalada, rotada o desplazada. Nosotros en trabajos previos^{12,17,18} hemos desarrollado un método analítico que permite evaluar los coeficientes Zernike correspondientes a una pupila con determinado tamaño y centro (denominados coeficientes nuevos) en base a los calculados por trazado de rayos para otra pupila (denominados coeficientes originales). Considerando que la pupila nueva está contenida en la original, obtuvimos fórmulas analíticas para todos los coeficientes nuevos de hasta séptimo orden en términos de los originales y del escaleo y descentrado pupilar.

En el presente trabajo tenemos en cuenta las expresiones analíticas de todos los coeficientes nuevos de hasta 4^{to} orden (en trabajos anteriores^{12,17} por simplicidad habíamos dejado de lado los de bajo orden) en función de los originales de hasta 7^o orden y de los datos pupilares. En la Sección 2 resumimos la metodología para hallar coeficientes nuevos en función de originales y en la Sección 3 escribimos las expresiones explícitas para los coeficientes nuevos de hasta 4^{to} orden. Finalmente, en la Sección 4 aplicamos las fórmulas obtenidas a 2 sistemas ópticos, la córnea de un sujeto T.O. con aberraciones severas y un sistema óptico formador de imágenes arbitrario que originalmente solo tiene aberración esférica de 4^{to} orden.

2. Metodología para hallar coeficientes Zernike nuevos en función de originales cuando varía la pupila

En esta Sección se trata brevemente el desarrollo de la aberración del frente de ondas en modos Zernike y se resume la metodología que hemos propuesto utilizar^{12,17} para hallar las expresiones de los coeficientes nuevos en función de los originales cuando la pupila se contrae y se desplaza en una dirección transversal arbitraria.

2.1 Desarrollo de la aberración del frente de ondas en modos Zernike

La aberración del frente de ondas (Figura 1 (a)) para un dado punto objeto es¹² $W(\rho, \theta) = [V K]$ (corchetes indican camino óptico, V y K son puntos de los frentes ideal y real en la pupila de salida y (ρ, θ) son coordenadas polares normalizadas en la esfera de referencia a la salida). El desarrollo de $W(\rho, \theta)$ en polinomios o modos Zernike $Z_n^m(\rho, \theta)$ con coeficientes C_n^m es^{2,9}

$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=-n}^n C_n^m Z_n^m(\rho, \theta) \quad (1)$$

El orden n (con $n_{\max} \geq n \geq 0$); la frecuencia m y el índice j son números reales tales que $j = [n(n+2)+m]/2$; $n \geq 0$ y $m = -n+2k$ (con k entero y $0 \leq k \leq n$). Las aberraciones se consideran de orden superior si $n \geq 3$. Los polinomios Zernike de hasta séptimo orden son los de Tabla I.

Tabla I. Polinomios Zernike de hasta orden 7			
j = índice	n = orden	m = frecuencia	$Z_n^m(\rho, \theta)$
0	0	0	1
1	1	-1	$2 \rho \sin \theta$
2	1	1	$2 \rho \cos \theta$
3	2	-2	$\sqrt{6} \rho^2 \sin 2\theta$
4	2	0	$\sqrt{3} (2\rho^2 - 1)$
5	2	2	$\sqrt{6} \rho^2 \cos 2\theta$
6	3	-3	$\sqrt{8} \rho^3 \sin 3\theta$
7	3	-1	$\sqrt{8} (3\rho^3 - 2\rho) \sin \theta$
8	3	1	$\sqrt{8} (3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$
9	3	3	$\sqrt{8} \rho^3 \cos 3\theta$
10	4	-4	$\sqrt{10} \rho^4 \sin 4\theta$
11	4	-2	$\sqrt{10} (4\rho^4 - 3\rho^2) \sin 2\theta$
12	4	0	$\sqrt{5} (6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$
13	4	2	$\sqrt{10} (4\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\theta$
14	4	4	$\sqrt{10} \rho^4 \cos 4\theta$
15	5	-5	$\sqrt{12} \rho^5 \sin 5\theta$
16	5	-3	$\sqrt{12} (5\rho^5 - 4\rho^3) \sin 3\theta$
17	5	-1	$\sqrt{12} (10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \sin \theta$
18	5	1	$\sqrt{12} (10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \cos \theta$
19	5	3	$\sqrt{12} (5\rho^5 - 4\rho^3) \cos 3\theta$
20	5	5	$\sqrt{12} \rho^5 \cos 5\theta$
21	6	-6	$\sqrt{14} \rho^6 \sin 6\theta$
22	6	-4	$\sqrt{14} (6\rho^6 - 5\rho^4) \sin 4\theta$
23	6	-2	$\sqrt{14} (15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2) \sin 2\theta$
24	6	0	$\sqrt{7} (20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1)$
25	6	2	$\sqrt{14} (15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2) \cos 2\theta$
26	6	4	$\sqrt{14} (6\rho^6 - 5\rho^4) \cos 4\theta$
27	6	6	$\sqrt{14} \rho^6 \cos 6\theta$
28	7	-7	$4 \rho^7 \sin 7\theta$
29	7	-5	$4 (7\rho^7 - 6\rho^5) \sin 5\theta$
30	7	-3	$4 (21\rho^7 - 30\rho^5 + 10\rho^3) \sin 3\theta$
31	7	-1	$4 (35\rho^7 - 60\rho^5 + 30\rho^3 - 4\rho) \sin \theta$
32	7	1	$4 (35\rho^7 - 60\rho^5 + 30\rho^3 - 4\rho) \cos \theta$
33	7	3	$4 (21\rho^7 - 30\rho^5 + 10\rho^3) \cos 3\theta$
34	7	5	$4 (7\rho^7 - 6\rho^5) \cos 5\theta$
35	7	7	$4 \rho^7 \cos 7\theta$

2.2 Metodología para evaluar coeficientes nuevos en términos de los originales

Las fórmulas analíticas para los coeficientes de Zernike nuevos de hasta 7º orden en términos de los coeficientes originales y de los datos referentes a ambas pupilas se han obtenido en trabajos previos^{12,17}. En estos trabajos consideramos que los valores de los coeficientes originales C_j (que son los elementos de un vector columna \mathbf{C}) se han evaluado por trazado de rayos para una pupila de radio a centrada en cierto punto (que es el origen de coordenadas cartesianas (X, Y)) y son conocidos. Encontramos las expresiones para los nuevos coeficientes C'_j (que son los elementos de un vector columna \mathbf{C}') para una pupila de radio b centrada en un punto de coordenadas (d, g) (que es el origen de coordenadas cartesianas (X', Y')). Se tiene (Figura 2 (a))

$$X = X' + d \quad Y = Y' + g \quad f = (d^2 + g^2)^{1/2} \quad (2)$$

Asociadas a (X, Y) y a (X', Y') , definimos coordenadas cartesianas normalizadas (x, y) y (x', y') respectivamente y coordenadas polares correspondientes,

$$\begin{aligned} x = X / a & \quad y = Y / a & \quad \rho = (x^2 + y^2)^{1/2} & \quad \text{Cos}(\theta) = x / \rho & \quad \text{Sen}(\theta) = y / \rho \\ x' = X' / b & \quad y' = Y' / b & \quad \rho' = (x'^2 + y'^2)^{1/2} & \quad \text{Cos}(\theta') = x' / \rho' & \quad \text{Sen}(\theta') = y' / \rho' \end{aligned} \quad (3)$$

Para simplificar la notación, definimos la contracción relativa B ; el descentrado relativo (D, G) ; el módulo del descentrado relativo F y el ángulo ε subtendido por la dirección de desplazamiento pupilar con el eje X (Figura 2 (b)). Para que la información concerniente a la aberración del frente de ondas en la nueva pupila esté disponible, consideramos $B \leq 1$ y $|F| < 1 - B$ y tenemos

$$B = b/a \quad D = d/a \quad G = g/a \quad F = f/a \quad D = F \text{Cos}(\varepsilon) \quad G = F \text{Sen}(\varepsilon) \quad (4)$$

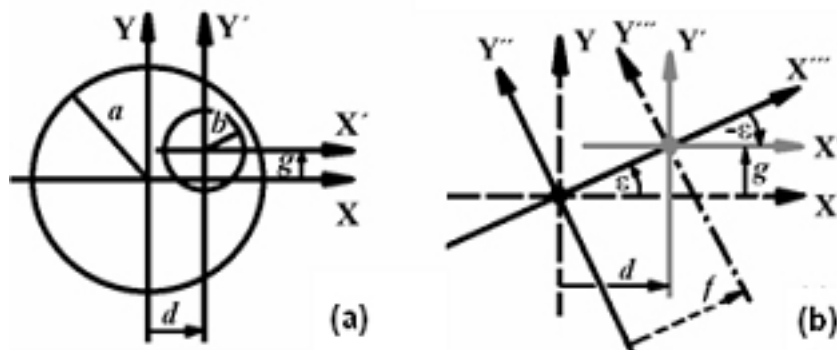


Figura 2. Coordenadas originales $((X, Y))$ y nuevas $((X', Y'))$ para escaleo y traslación arbitraria de la pupila. (a): pupilas original y nueva. (b): Transformación de coordenadas obtenida mediante una rotación en un ángulo ε (siendo (X'', Y'') coordenadas rotadas), luego un escaleo y traslación a lo largo del eje X'' (siendo (X''', Y''') coordenadas rotadas y trasladadas) y finalmente una rotación en un ángulo $-\varepsilon$.

En Ref.12 hallamos la matriz de escaleo y traslación horizontal, **SH**, mediante 5 pasos. En el 1^{er} paso agrupamos los polinomios Zernike en 4 tipos (siendo tipo I: $m=n-2>0$ o $m=-(-n-2) < 0$; tipo II: $0 < m \leq n-4$ o $0 > m \geq -|n-4|$, tipo III: $m=0$ y tipo IV: $m=n$ o $m=-n$) y consideramos primero todos los de tipo I, luego tipo II, etc. En el 2^{do} paso obtenemos expresiones para ρ^2 , $\rho \text{Sen}(\theta)$ y $\rho \text{Cos}(\theta)$ en términos de ρ' y θ' . En el 3^{er} paso escribimos $C_n^m Z_n^m(\rho, \theta)$ para cada aberración original en términos de (ρ', θ') . En el 4^{to} paso, sumamos y restamos términos para escribir cada aberración original, para puntos dentro de la pupila nueva, como suma de aberraciones nuevas. Finalmente en el 5^{to} paso, escribimos cada coeficiente nuevo en función de D , de B y de los coeficientes originales siendo los factores que los multiplican los elementos de **SH**. En Ref.17 encontramos la matriz de escaleo y traslación arbitraria de dimensión 36×36 , **T**, multiplicando la matriz **SH** por matrices de rotación $\mathbf{U}(\varepsilon)$ y $\mathbf{U}(-\varepsilon)$ (Figura 2 (b) y, utilizando la matriz **T**, hallamos las expresiones analíticas para los elementos del vector de coeficientes nuevos \mathbf{C}' . Es decir, si el símbolo * indica multiplicación de matrices, tenemos

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}(-\varepsilon) * \mathbf{SH}(F) * \mathbf{U}(\varepsilon) \quad \mathbf{C}' = \mathbf{T} * \mathbf{C} \quad (5)$$

3. Fórmulas para los coeficientes nuevos de hasta 4^{to} orden en función de los coeficientes originales de hasta 7^o orden

Los modos Zernike de hasta orden $n'=4$ se representan mediante sus mapas de colores en la Figura 3 (cada modo corresponde a una aberración particular). Para los coeficientes nuevos de hasta 4^{to} orden, utilizando la metodología tratada en la Sección 2, se obtienen las ecuaciones de la Tabla II (las de orden n' tal que $5 \leq n' \leq 7$ están disponibles en Ref.17).

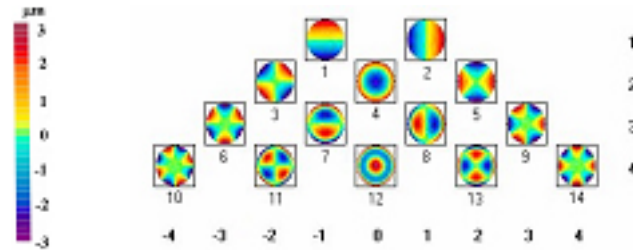


Figura 3. Pirámide de mapas de colores correspondientes a modos Zernike de hasta 4^º orden (si n'=0 se tiene pistón y carece de importancia). El orden n' se indica a la derecha de la pirámide y se tiene para n'=1: C₁ y C₂ (tilt); para n'=2: C₃ y C₅ (astigmatismo) y C₄ (desenfoque); para n'=3: C₆ y C₉ (trifolio) y C₇ y C₈ (coma) y para n'=4: C₁₀ y C₁₄ (tetrafolio), C₁₁ y C₁₃ (astigmatismo) y C₁₂ (aberración esférica). La frecuencia m' se indica debajo de la pirámide y el índice j' debajo de cada modo. A la izquierda de la pirámide se muestran valores de W para la escala de colores usada.

TABLA II: Coeficientes Zernike nuevos de hasta cuarto orden (contribuciones negativas sombreadas)
ORDEN CERO (n'=0)

C ₀ = C ₀
+ C ₁ 2 G
+ C ₂ 2 D
+ C ₃ 2 (6) ^{1/2} D G
+ C ₄ (3) ^{1/2} (2F ² + B ² - 1)
+ C ₅ (6) ^{1/2} (D ² - G ²)
+ C ₆ 2 (2) ^{1/2} G (3D ² - G ²)
+ C ₇ 2 (2) ^{1/2} G (3F ² + 3B ² - 2)
+ C ₈ 2 (2) ^{1/2} D (3F ² + 3B ² - 2)
+ C ₉ 2 (2) ^{1/2} D (D ² - 3G ²)
+ C ₁₀ 4 (10) ^{1/2} D G (D ² - G ²)
+ C ₁₁ 2 (10) ^{1/2} D G (4F ² + 6B ² - 3)
+ C ₁₂ (5) ^{1/2} (6F ⁴ + 12F ² B ² + 2B ⁴ - 6F ² - 3B ² + 1)
+ C ₁₃ (10) ^{1/2} (D ² - G ²) (4F ² + 6B ² - 3)
+ C ₁₄ (10) ^{1/2} (D ⁴ - 6D ² G ² + G ⁴)
+ C ₁₅ 2 (3) ^{1/2} G (5D ⁴ - 10D ² G ² + G ⁴)
+ C ₁₆ 2 (3) ^{1/2} G (15D ⁴ + 10D ² G ² - 5G ⁴ + 30D ² B ² - 10G ² B ² - 12D ² + 4G ²)
+ C ₁₇ 2 (3) ^{1/2} G (10F ⁴ + 30F ² B ² + 10B ⁴ - 12F ² - 12B ² + 3)
+ C ₁₈ 2 (3) ^{1/2} D (10F ⁴ + 30F ² B ² + 10B ⁴ - 12F ² - 12B ² + 3)
+ C ₁₉ 2 (3) ^{1/2} D (5D ⁴ - 10D ² G ² - 15G ⁴ + 10D ² B ² - 30G ² B ² - 4D ² + 12G ²)
+ C ₂₀ 2 (3) ^{1/2} D (D ⁴ - 10D ² G ² + 5G ⁴)
+ C ₂₁ 2 (14) ^{1/2} D G (3D ⁴ - 10D ² G ² + 3G ⁴)
+ C ₂₂ 4 (14) ^{1/2} D G (6D ⁴ - 6G ⁴ + 15D ² B ² - 15G ² B ² - 5D ² + 5G ²)
+ C ₂₃ 2 (14) ^{1/2} D G (15F ⁴ + 60F ² B ² + 30B ⁴ - 20F ² - 30B ² + 6)
+ C ₂₄ (7) ^{1/2} (20F ⁶ + 90F ⁴ B ² + 60F ² B ⁴ + 5B ⁶ - 30F ⁴ - 60F ² B ² - 10B ⁴ + 12F ² + 6B ² - 1)
+ C ₂₅ (14) ^{1/2} (D ² - G ²) (15F ⁴ + 60F ² B ² + 30B ⁴ - 20F ² - 30B ² + 6)
+ C ₂₆ (14) ^{1/2} (6D ⁶ - 30D ⁴ G ² - 30D ² G ⁴ + 6G ⁶ + 15D ⁴ B ² - 90D ² G ² B ² + 15G ⁴ B ² - 5D ⁴ + 30D ² G ² - 5G ⁴)
+ C ₂₇ (14) ^{1/2} (D ⁶ - 15D ⁴ G ² + 15D ² G ⁴ - G ⁶)
+ C ₂₈ 4 G (7D ⁶ - 35D ⁴ G ² + 21D ² G ⁴ - G ⁶)
+ C ₂₉ 4 G (35D ⁶ - 35D ⁴ G ² - 63D ² G ⁴ + 7G ⁶ + 105D ⁴ B ² - 210D ² G ² B ² + 21G ⁴ B ² - 30D ⁴ + 60D ² G ² - 6G ⁴)
+ C ₃₀ 4 G (63F ⁴ D ² - 21F ⁴ G ² + 315F ² D ² B ² - 105F ² G ² B ² + 210D ⁴ B ⁴ - 70G ² B ⁴ - 90F ² D ² + 30F ² G ² - 180D ² B ² + 60G ² B ² + 30D ² - 10G ²)
+ C ₃₁ 4 G (35F ⁶ + 210F ⁴ B ² + 210F ² B ⁴ + 35B ⁶ - 60F ⁴ - 180F ² B ² - 60B ⁴ + 30F ² + 30B ² - 4)
+ C ₃₂ 4 D (35F ⁶ + 210F ⁴ B ² + 210F ² B ⁴ + 35B ⁶ - 60F ⁴ - 180F ² B ² - 60B ⁴ + 30F ² + 30B ² - 4)
+ C ₃₃ 4 D (21F ⁴ D ² - 63F ⁴ G ² + 105F ² D ² B ² - 315F ² G ² B ² + 70D ² B ⁴ - 210G ² B ⁴ - 30F ² D ² + 90F ² G ² - 60D ² B ² + 180G ² B ² + 10D ² - 30G ²)
+ C ₃₄ 4 D (7D ⁶ - 63D ⁴ G ² - 35D ² G ⁴ + 35G ⁶ + 21D ⁴ B ² - 210D ² G ² B ² + 105G ⁴ B ² - 6D ⁴ + 60D ² G ² - 30G ⁴)
+ C ₃₅ 4 D (D ⁶ - 21D ⁴ G ² + 35D ² G ⁴ - 7G ⁶)

PRIMER ORDEN (n'=1)

$C'_1 = C_1 B$	$C'_2 = C_2 B$
+ C_3 (6) ^{1/2} B D	+ C_3 (6) ^{1/2} B G
+ C_4 2 (3) ^{1/2} B G	+ C_4 2 (3) ^{1/2} B D
- C_5 (6) ^{1/2} B G	+ C_5 (6) ^{1/2} B D
+ C_6 3 (2) ^{1/2} B (D ² - G ²)	+ C_6 6 (2) ^{1/2} B D G
+ C_7 (2) ^{1/2} B (3D ² + 9G ² + 2B ² - 2)	+ C_7 6 (2) ^{1/2} B D G
+ C_8 6 (2) ^{1/2} B D G	+ C_8 (2) ^{1/2} B (9D ² + 3G ² + 2B ² - 2)
- C_9 6 (2) ^{1/2} B D G	+ C_9 3 (2) ^{1/2} B (D ² - G ²)
+ C_{10} 2 (10) ^{1/2} B D (D ² - 3G ²)	+ C_{10} 2 (10) ^{1/2} B G (3D ² - G ²)
+ C_{11} (10) ^{1/2} B D (4D ² + 12G ² + 4B ² - 3)	+ C_{11} (10) ^{1/2} B G (12D ² + 4G ² + 4B ² - 3)
+ C_{12} 2 (5) ^{1/2} B G (6F ² + 4B ² - 3)	+ C_{12} 2 (5) ^{1/2} B D (6F ² + 4B ² - 3)
- C_{13} (10) ^{1/2} B G (8G ² + 4B ² - 3)	+ C_{13} (10) ^{1/2} B D (8D ² + 4B ² - 3)
- C_{14} 2 (10) ^{1/2} B G (3D ² - G ²)	+ C_{14} 2 (10) ^{1/2} B D (D ² - 3G ²)
+ C_{15} 5 (3) ^{1/2} B (D ⁴ - 6D ² G ² + G ⁴)	+ C_{15} 20 (3) ^{1/2} B D G (D ² - G ²)
+ C_{16} 2 (3) ^{1/2} B ((15/2)D ⁴ + 15D ² G ² - (25/2)G ⁴ + (D ² -G ²) (10B ² -6))	+ C_{16} 4 (3) ^{1/2} B D G (15D ² + 5G ² + 10B ² - 6)
+ C_{17} (3) ^{1/2} B (10D ⁴ + 60D ² G ² + 50G ⁴ + 20D ² B ² + 60G ² B ² + 5B ⁴ - 12D ² - 36G ² - 8B ² + 3)	+ C_{17} 8 (3) ^{1/2} B D G (5F ² + 5B ² - 3)
+ C_{18} 8 (3) ^{1/2} B D G (5F ² + 5B ² - 3)	+ C_{18} (3) ^{1/2} B (50D ⁴ + 60D ² G ² + 10G ⁴ + 60D ² B ² + 20G ² B ² + 5B ⁴ - 36D ² - 12G ² - 8B ² + 3)
- C_{19} 4 (3) ^{1/2} B D G (5D ² + 15G ² + 10B ² - 6)	+ C_{19} 2 (3) ^{1/2} B ((25/2)D ⁴ - 15D ² G ² - (15/2)G ⁴ + (D ² -G ²) (10B ² - 6))
- C_{20} 20 (3) ^{1/2} B D G (D ² - G ²)	+ C_{20} 5 (3) ^{1/2} B (D ⁴ - 6D ² G ² + G ⁴)
+ C_{21} 3 (14) ^{1/2} B D (D ⁴ - 10D ² G ² + 5G ⁴)	+ C_{21} 3 (14) ^{1/2} B G (5D ⁴ - 10D ² G ² + G ⁴)
+ C_{22} 2 (14) ^{1/2} B D (6D ⁴ -30G ⁴ + (D ² -3G ²) (10B ² - 5))	+ C_{22} 2 (14) ^{1/2} B G (30D ⁴ -6G ⁴ + (3D ² -G ²) (10B ² -5))
+ C_{23} (14) ^{1/2} B D (15D ⁴ + 90D ² G ² + 75G ⁴ + 40D ² B ² + 120G ² B ² + 15B ⁴ - 20D ² - 60G ² - 20B ² + 6)	+ C_{23} (14) ^{1/2} B G (75D ⁴ + 90D ² G ² + 15G ⁴ + 120D ² B ² + 40G ² B ² + 15B ⁴ - 60D ² - 20G ² - 20B ² + 6)
+ C_{24} 2 (7) ^{1/2} B G (30F ⁴ +60F ² B ² +15B ⁴ -30F ² -20B ² +6)	+ C_{24} 2 (7) ^{1/2} B D (30F ⁴ +60F ² B ² +15B ⁴ -30F ² -20B ² +6)
- C_{25} (14) ^{1/2} B G (- 15D ⁴ + 30D ² G ² + 45G ⁴ + 80G ² B ² + 15B ⁴ - 40G ² - 20B ² + 6)	+ C_{25} (14) ^{1/2} B D (45D ⁴ + 30D ² G ² - 15G ⁴ + 80D ² B ² + 15B ⁴ - 40D ² - 20B ² + 6)
- C_{26} 2 (14) ^{1/2} B G (15D ⁴ + 30D ² G ² - 9G ⁴ + (3D ² -G ²) (10B ² - 5))	+ C_{26} 2 (14) ^{1/2} B D (9D ⁴ - 30D ² G ² - 15G ⁴ + (D ² -3G ²) (10B ² - 5))
- C_{27} 3 (14) ^{1/2} B G (5D ⁴ - 10D ² G ² + G ⁴)	+ C_{27} 3 (14) ^{1/2} B D (D ⁴ - 10D ² G ² + 5G ⁴)
+ C_{28} 14 B (D ⁶ - 15D ⁴ G ² + 15D ² G ⁴ - G ⁶)	+ C_{28} 28 B D G (3D ⁴ - 10D ² G ² + 3G ⁴)
+ C_{29} 10 B (7D ⁶ - 21D ⁴ G ² - 63D ² G ⁴ + (49/5)G ⁶ + (D ⁴ - 6D ² G ² + G ⁴) (14B ² - 6))	+ C_{29} 20 B D G (21D ⁴ - 14D ² G ² - (63/5)G ⁴ + 2(D ² - G ²) (14B ² - 6))
+ C_{30} 6 B (21D ⁶ + 105D ⁴ G ² + 35D ² G ⁴ - 49G ⁶ + 70D ⁴ B ² + 140D ² G ² B ² - (350/3)G ⁴ B ² + 35D ² B ⁴ - 35G ² B ⁴ - 30D ⁴ - 60D ² G ² + 50G ⁴ + (D ² -G ²) (-40B ² +10))	+ C_{30} 12 B D G (63D ⁴ + 70D ² G ² + 7G ⁴ + 140D ² B ² + (140/3)G ² B ² + 35B ⁴ - 60D ² - 20G ² - 40B ² + 10)
+ C_{31} 2 B (35D ⁶ + 315D ⁴ G ² + 525D ² G ⁴ + 245G ⁶ + 140D ⁴ B ² + 840D ² G ² B ² + 700G ⁴ B ² + 105D ² B ⁴ + 315G ² B ⁴ + 14B ⁶ - 60D ⁴ - 360D ² G ² - 300G ⁴ - 120D ² B ² - 360G ² B ² - 30B ⁴ + 30D ² + 90G ² + 20B ² - 4)	+ C_{31} 20 B D G (21F ⁴ + 56F ² B ² + 21B ⁴ - 24F ² - 24B ² + 6)
+ C_{32} 20 B D G (21F ⁴ + 56F ² B ² + 21B ⁴ - 24F ² - 24B ² + 6)	+ C_{32} 2 B (245D ⁶ + 525D ⁴ G ² + 315D ² G ⁴ + 35G ⁶ + 700D ⁴ B ² + 840D ² G ² B ² + 140G ⁴ B ² + 315D ² B ⁴ + 105G ² B ⁴ + 14B ⁶ - 300D ⁴ - 360D ² G ² - 60G ⁴ - 360D ² B ² - 120G ² B ² - 30B ⁴ + 90D ² + 30G ² + 20B ² - 4)
- C_{33} 12 B D G (7D ⁴ + 70D ² G ² + 63G ⁴ + (140/3)D ² B ² + 140G ² B ² + 35B ⁴ - 20D ² - 60G ² - 40B ² + 10)	+ C_{33} 6 B (49D ⁶ - 35D ⁴ G ² - 105D ² G ⁴ - 21G ⁶ + (350/3)D ⁴ B ² - 140D ² G ² B ² - 70G ⁴ B ² + 35D ² B ⁴ - 35G ² B ⁴ - 50D ⁴ + 60D ² G ² + 30G ⁴ + (D ² -G ²) (-40B ² +10))
- C_{34} 20 B D G ((63/5)D ⁴ + 14D ² G ² - 21G ⁴ + 2(D ² - G ²) (14B ² - 6))	+ C_{34} 10 B ((49/5)D ⁶ - 63D ⁴ G ² - 21D ² G ⁴ + 7G ⁶ + (D ⁴ - 6D ² G ² + G ⁴) (14B ² - 6))
- C_{35} 28 B D G (3D ⁴ - 10D ² G ² + 3G ⁴)	+ C_{35} 14 B (D ⁶ - 15D ⁴ G ² + 15D ² G ⁴ - G ⁶)

SEGUNDO ORDEN (n'=2)

$C'_3 = C_3 B^2$	$C'_5 = C_5 B^2$
+ C_6 2 (3) ^{1/2} B ² D	+ C_6 2 (3) ^{1/2} B ² G
+ C_7 2 (3) ^{1/2} B ² D	+ C_7 2 (3) ^{1/2} B ² G
+ C_8 2 (3) ^{1/2} B ² G	+ C_8 2 (3) ^{1/2} B ² D
+ C_9 2 (3) ^{1/2} B ² G	+ C_9 2 (3) ^{1/2} B ² D
+ C_{10} 2 (15) ^{1/2} B ² (D ² - G ²)	+ C_{10} 4 (15) ^{1/2} B ² D G
+ C_{11} (15) ^{1/2} B ² (4F ² + B ² - 1)	+ C_{11} 0
+ C_{12} 4 (30) ^{1/2} B ² D G	+ C_{12} 2 (30) ^{1/2} B ² (D ² - G ²)
+ C_{13} 0	+ C_{13} (15) ^{1/2} B ² (4F ² + B ² - 1)
+ C_{14} 4 (15) ^{1/2} B ² D G	+ C_{14} 2 (15) ^{1/2} B ² (D ² - G ²)
+ C_{15} 10 (2) ^{1/2} B ² D (D ² - 3G ²)	+ C_{15} 10 (2) ^{1/2} B ² G (3D ² - G ²)
+ C_{16} 3 (2) ^{1/2} B ² D (10F ² + 5B ² - 4)	+ C_{16} 3 (2) ^{1/2} B ² G (10F ² + 5B ² - 4)
+ C_{17} (2) ^{1/2} B ² D (20D ² + 60G ² + 15B ² - 12)	+ C_{17} (2) ^{1/2} B ² G (40G ² + 15B ² - 12)
+ C_{18} (2) ^{1/2} B ² G (60D ² + 20G ² + 15B ² - 12)	+ C_{18} (2) ^{1/2} B ² D (40D ² + 15B ² - 12)
+ C_{19} 3 (2) ^{1/2} B ² G (10F ² + 5B ² - 4)	+ C_{19} 3 (2) ^{1/2} B ² D (10F ² + 5B ² - 4)
+ C_{20} 10 (2) ^{1/2} B ² G (3D ² - G ²)	+ C_{20} 10 (2) ^{1/2} B ² D (D ² - 3G ²)
+ C_{21} 5 (21) ^{1/2} B ² (D ⁴ - 6D ² G ² + G ⁴)	+ C_{21} 20 (21) ^{1/2} B ² D G (D ² - G ²)
+ C_{22} 5 (21) ^{1/2} B ² (D ² - G ²) (4F ² + 3B ² - 2)	+ C_{22} 10 (21) ^{1/2} B ² D G (4F ² + 3B ² - 2)
+ C_{23} (21) ^{1/2} B ² (25D ⁴ + 90D ² G ² + 25G ⁴ + 30F ² B ² + 3B ⁴ - 20F ² - 5B ² + 2)	+ C_{23} 20 (21) ^{1/2} B ² D G (D ² - G ²)
+ C_{24} 10 (42) ^{1/2} B ² D G (4F ² + 3B ² - 2)	+ C_{24} 5 (42) ^{1/2} B ² (D ² - G ²) (4F ² + 3B ² - 2)
+ C_{25} 20 (21) ^{1/2} B ² D G (D ² - G ²)	+ C_{25} (21) ^{1/2} B ² (35D ⁴ + 30D ² G ² + 35G ⁴ + 30F ² B ² + 3B ⁴ - 20F ² - 5B ² + 2)
+ C_{26} 10 (21) ^{1/2} B ² D G (4F ² + 3B ² - 2)	+ C_{26} 5 (21) ^{1/2} B ² (D ² - G ²) (4F ² + 3B ² - 2)
+ C_{27} 20 (21) ^{1/2} B ² D G (D ² - G ²)	+ C_{27} 5 (21) ^{1/2} B ² (D ⁴ - 6D ² G ² + G ⁴)
+ C_{28} 14 (6) ^{1/2} B ² D (D ⁴ - 10D ² G ² + 5G ⁴)	+ C_{28} 14 (6) ^{1/2} B ² G (5D ⁴ - 10D ² G ² + G ⁴)
+ C_{29} 10 (6) ^{1/2} B ² D (D ² - 3G ²) (7F ² + 7B ² - 4)	+ C_{29} 10 (6) ^{1/2} B ² G (3D ² - G ²) (7F ² + 7B ² - 4)
+ C_{30} 2 (6) ^{1/2} B ² D (63D ⁴ + 210D ² G ² + 35G ⁴ + 105F ² B ² + 21B ⁴ - 60F ² - 30B ² + 10)	+ C_{30} 2 (6) ^{1/2} B ² G (105D ⁴ + 70D ² G ² + 77G ⁴ + 105F ² B ² + 21B ⁴ - 60F ² - 30B ² + 10)
+ C_{31} 2 (6) ^{1/2} B ² D (35D ⁴ + 210D ² G ² + 175G ⁴ + 70D ² B ² + 210G ² B ² + 21B ⁴ - 40D ² - 120G ² - 30B ² + 10)	+ C_{31} 2 (6) ^{1/2} B ² G (-35D ⁴ + 70D ² G ² + 105G ⁴ + 140G ² B ² + 21B ⁴ - 80G ² - 30B ² + 10)
+ C_{32} 2 (6) ^{1/2} B ² G (175D ⁴ + 210D ² G ² + 35G ⁴ + 210D ² B ² + 70G ² B ² + 21B ⁴ - 120D ² - 40G ² - 30B ² + 10)	+ C_{32} 2 (6) ^{1/2} B ² D (105D ⁴ + 70D ² G ² - 35G ⁴ + 140D ² B ² + 21B ⁴ - 80D ² - 30B ² + 10)
+ C_{33} 2 (6) ^{1/2} B ² G (35D ⁴ + 210D ² G ² + 63G ⁴ + 105F ² B ² + 21B ⁴ - 60F ² - 30B ² + 10)	+ C_{33} 2 (6) ^{1/2} B ² D (77D ⁴ + 70D ² G ² + 105G ⁴ + 105F ² B ² + 21B ⁴ - 60F ² - 30B ² + 10)
+ C_{34} 10 (6) ^{1/2} B ² G (3D ² - G ²) (7F ² + 7B ² - 4)	+ C_{34} 10 (6) ^{1/2} B ² D (D ² - 3G ²) (7F ² + 7B ² - 4)
+ C_{35} 14 (6) ^{1/2} B ² G (5D ⁴ - 10D ² G ² + G ⁴)	+ C_{35} 14 (6) ^{1/2} B ² D (D ⁴ - 10D ² G ² + 5G ⁴)

$C'_4 = C_4 B^2$
+ C_7 2 (6) ^{1/2} B ² G
+ C_8 2 (6) ^{1/2} B ² D
+ C_{11} 4 (30) ^{1/2} B ² D G
+ C_{12} (15) ^{1/2} B ² (4F ² + B ² - 1)
+ C_{13} 2 (30) ^{1/2} B ² (D ² - G ²)
+ C_{16} 20 B ² G (3D ² - G ²)
+ C_{17} 6 B ² G (10F ² + 5B ² - 4)
+ C_{18} 6 B ² D (10F ² + 5B ² - 4)
+ C_{19} 20 B ² D (D ² - 3G ²)
+ C_{22} 20 (42) ^{1/2} B ² D G (D ² - G ²)
+ C_{23} 10 (42) ^{1/2} B ² D G (4F ² + 3B ² - 2)
+ C_{24} (21) ^{1/2} B ² (30F ⁴ + 30F ² B ² + 3B ⁴ - 20F ² - 5B ² + 2)
+ C_{25} 5 (42) ^{1/2} B ² (D ² - G ²) (4F ² + 3B ² - 2)
+ C_{26} 5 (42) ^{1/2} B ² (D ⁴ - 6D ² G ² + G ⁴)
+ C_{29} 28 (3) ^{1/2} B ² G (5D ⁴ - 10D ² G ² + G ⁴)
+ C_{30} 20 (3) ^{1/2} B ² G (21D ⁴ + 14D ² G ² - 7G ⁴ + 21D ² B ² - 7G ² B ² - 12D ² + 4G ²)
+ C_{31} 4 (3) ^{1/2} B ² G (70F ⁴ + 105F ² B ² + 21B ⁴ - 60F ² - 30B ² + 10)
+ C_{32} 4 (3) ^{1/2} B ² D (70F ⁴ + 105F ² B ² + 21B ⁴ - 60F ² - 30B ² + 10)
+ C_{33} 20 (3) ^{1/2} B ² D (7D ⁴ - 14D ² G ² - 21G ⁴ + 7D ² B ² - 21G ² B ² - 4D ² + 12G ²)
+ C_{34} 28 (3) ^{1/2} B ² D (D ⁴ - 10D ² G ² + 5G ⁴)

TERCER ORDEN (m=3)

$C_6 = C_6 B^3$	$C_9 = C_9 B^3$
+ $C_{10} 2 (5)^{1/2} B^3 D$	+ $C_{10} 2 (5)^{1/2} B^3 G$
+ $C_{11} 2 (5)^{1/2} B^3 D$	+ $C_{11} 2 (5)^{1/2} B^3 G$
+ $C_{13} 2 (5)^{1/2} B^3 G$	+ $C_{13} 2 (5)^{1/2} B^3 D$
+ $C_{14} 2 (5)^{1/2} B^3 G$	+ $C_{14} 2 (5)^{1/2} B^3 D$
+ $C_{15} 5 (6)^{1/2} B^3 (D^2 - G^2)$	+ $C_{15} 10 (6)^{1/2} B^3 D G$
+ $C_{16} 2 (6)^{1/2} B^3 (5F^2 + B^2 - 1)$	+ $C_{16} 0$
+ $C_{17} 5 (6)^{1/2} B^3 (D^2 - G^2)$	+ $C_{17} 10 (6)^{1/2} B^3 D G$
+ $C_{18} 10 (6)^{1/2} B^3 D G$	+ $C_{18} 5 (6)^{1/2} B^3 (D^2 - G^2)$
+ $C_{19} 0$	+ $C_{19} 2 (6)^{1/2} B^3 (5F^2 + B^2 - 1)$
+ $C_{20} 10 (6)^{1/2} B^3 D G$	+ $C_{20} 5 (6)^{1/2} B^3 (D^2 - G^2)$
+ $C_{21} 10 (7)^{1/2} B^3 D (D^2 - 3G^2)$	+ $C_{21} 10 (7)^{1/2} B^3 G (3D^2 - G^2)$
+ $C_{22} 2 (7)^{1/2} B^3 D (15F^2 + 6B^2 - 5)$	+ $C_{22} 2 (7)^{1/2} B^3 G (15F^2 + 6B^2 - 5)$
+ $C_{23} 2 (7)^{1/2} B^3 D (15F^2 + 6B^2 - 5)$	+ $C_{23} 2 (7)^{1/2} B^3 G (15F^2 + 6B^2 - 5)$
+ $C_{24} 10 (14)^{1/2} B^3 G (3D^2 - G^2)$	+ $C_{24} 10 (14)^{1/2} B^3 D (D^2 - 3G^2)$
+ $C_{25} 2 (7)^{1/2} B^3 G (15F^2 + 6B^2 - 5)$	+ $C_{25} 2 (7)^{1/2} B^3 D (15F^2 + 6B^2 - 5)$
+ $C_{26} 2 (7)^{1/2} B^3 G (15F^2 + 6B^2 - 5)$	+ $C_{26} 2 (7)^{1/2} B^3 D (15F^2 + 6B^2 - 5)$
+ $C_{27} 10 (7)^{1/2} B^3 G (3D^2 - G^2)$	+ $C_{27} 10 (7)^{1/2} B^3 D (D^2 - 3G^2)$
+ $C_{28} 35 (2)^{1/2} B^3 (D^4 - 6D^2G^2 + G^4)$	+ $C_{28} 140 (2)^{1/2} B^3 D G (D^2 - G^2)$
+ $C_{29} 4 (2)^{1/2} B^3 (D^2 - G^2) (35F^2 + 21B^2 - 15)$	+ $C_{29} 8 (2)^{1/2} B^3 D G (35F^2 + 21B^2 - 15)$
+ $C_{30} 2 (2)^{1/2} B^3 (105F^4 + 84F^2B^2 + 7B^4 - 60F^2 - 12B^2 + 5)$	+ $C_{30} 0$
+ $C_{31} 3 (2)^{1/2} B^3 (35D^4 + 70D^2G^2 - (175/3)G^4 + (D^2 - G^2)(28B^2 - 20))$	+ $C_{31} 6 (2)^{1/2} B^3 D G ((70/3)D^2 + 70G^2 + 28B^2 - 20)$
+ $C_{32} 6 (2)^{1/2} B^3 D G (70D^2 + (70/3)G^2 + 28B^2 - 20)$	+ $C_{32} 3 (2)^{1/2} B^3 ((175/3)D^4 - 70D^2G^2 - 35G^4 + (D^2 - G^2)(28B^2 - 20))$
+ $C_{33} 0$	+ $C_{33} 2 (2)^{1/2} B^3 (105F^4 + 84F^2B^2 + 7B^4 - 60F^2 - 12B^2 + 5)$
+ $C_{34} 8 (2)^{1/2} B^3 D G (35F^2 + 21B^2 - 15)$	+ $C_{34} 4 (2)^{1/2} B^3 (D^2 - G^2) (35F^2 + 21B^2 - 15)$
+ $C_{35} 140 (2)^{1/2} B^3 D G (D^2 - G^2)$	+ $C_{35} 35 (2)^{1/2} B^3 (D^4 - 6D^2G^2 + G^4)$

$C_7 = C_7 B^3$	$C_8 = C_8 B^3$
+ $C_{11} 2 (5)^{1/2} B^3 D$	+ $C_{11} 2 (5)^{1/2} B^3 G$
+ $C_{12} 2 (10)^{1/2} B^3 G$	+ $C_{12} 2 (10)^{1/2} B^3 D$
+ $C_{13} 2 (5)^{1/2} B^3 G$	+ $C_{13} 2 (5)^{1/2} B^3 D$
+ $C_{16} 5 (6)^{1/2} B^3 (D^2 - G^2)$	+ $C_{16} 10 (6)^{1/2} B^3 D G$
+ $C_{17} (6)^{1/2} B^3 (5D^2 + 15G^2 + 2B^2 - 2)$	+ $C_{17} 10 (6)^{1/2} B^3 D G$
+ $C_{18} 10 (6)^{1/2} B^3 D G$	+ $C_{18} (6)^{1/2} B^3 (15D^2 + 5G^2 + 2B^2 - 2)$
+ $C_{19} 10 (6)^{1/2} B^3 D G$	+ $C_{19} 5 (6)^{1/2} B^3 (D^2 - G^2)$
+ $C_{22} 10 (7)^{1/2} B^3 D (D^2 - 3G^2)$	+ $C_{22} 10 (7)^{1/2} B^3 G (3D^2 - G^2)$
+ $C_{23} 2 (7)^{1/2} B^3 D (10D^2 + 30G^2 + 6B^2 - 5)$	+ $C_{23} 2 (7)^{1/2} B^3 G (30D^2 + 10G^2 + 6B^2 - 5)$
+ $C_{24} 2 (14)^{1/2} B^3 G (15F^2 + 6B^2 - 5)$	+ $C_{24} 2 (14)^{1/2} B^3 D (15F^2 + 6B^2 - 5)$
+ $C_{25} 2 (7)^{1/2} B^3 G (20G^2 + 6B^2 - 5)$	+ $C_{25} 2 (7)^{1/2} B^3 D (20D^2 + 6B^2 - 5)$
+ $C_{26} 10 (7)^{1/2} B^3 G (3D^2 - G^2)$	+ $C_{26} 10 (7)^{1/2} B^3 D (D^2 - 3G^2)$
+ $C_{29} 35 (2)^{1/2} B^3 (D^4 - 6D^2G^2 + G^4)$	+ $C_{29} 140 (2)^{1/2} B^3 D G (D^2 - G^2)$
+ $C_{30} 3 (2)^{1/2} B^3 (35D^4 + 70D^2G^2 - (175/3)G^4 + (D^2 - G^2)(28B^2 - 20))$	+ $C_{30} 6 (2)^{1/2} B^3 D G (70D^2 + (70/3)G^2 + 28B^2 - 20)$
+ $C_{31} 2 (2)^{1/2} B^3 (35D^4 + 210D^2G^2 + 175G^4 + 42D^2B^2 + 126G^2B^2 + 7B^4 - 30D^2 - 90G^2 - 12B^2 + 5)$	+ $C_{31} 8 (2)^{1/2} B^3 D G (35F^2 + 21B^2 - 15)$
+ $C_{32} 8 (2)^{1/2} B^3 D G (35F^2 + 21B^2 - 15)$	+ $C_{32} 2 (2)^{1/2} B^3 (175D^4 + 210D^2G^2 + 35G^4 + 126D^2B^2 + 42G^2B^2 + 7B^4 - 90D^2 - 30G^2 - 12B^2 + 5)$
+ $C_{33} 6 (2)^{1/2} B^3 D G ((70/3)D^2 + 70G^2 + 28B^2 - 20)$	+ $C_{33} 3 (2)^{1/2} B^3 ((175/3)D^4 - 70D^2G^2 - 35G^4 + (D^2 - G^2)(28B^2 - 20))$
+ $C_{34} 140 (2)^{1/2} B^3 D G (D^2 - G^2)$	+ $C_{34} 35 (2)^{1/2} B^3 (D^4 - 6D^2G^2 + G^4)$

CUARTO ORDEN ($n'=4$)

$C'_{10} = C_{10} B^4$	$C'_{14} = C_{14} B^4$
+ $C_{15} (30)^{1/2} B^4 D$	+ $C_{15} (30)^{1/2} B^4 G$
+ $C_{16} (30)^{1/2} B^4 D$	- $C_{16} (30)^{1/2} B^4 G$
+ $C_{19} (30)^{1/2} B^4 G$	+ $C_{19} (30)^{1/2} B^4 D$
- $C_{20} (30)^{1/2} B^4 G$	+ $C_{20} (30)^{1/2} B^4 D$
+ $C_{21} 3 (35)^{1/2} B^4 (D^2 - G^2)$	+ $C_{21} 6 (35)^{1/2} B^4 D G$
+ $C_{22} (35)^{1/2} B^4 (6F^2 + B^2 - 1)$	+ $C_{22} 0$
+ $C_{23} 3 (35)^{1/2} B^4 (D^2 - G^2)$	- $C_{23} 6 (35)^{1/2} B^4 D G$
+ $C_{25} 6 (35)^{1/2} B^4 D G$	+ $C_{25} 3 (35)^{1/2} B^4 (D^2 - G^2)$
+ $C_{26} 0$	+ $C_{26} (35)^{1/2} B^4 (6F^2 + B^2 - 1)$
- $C_{27} 6 (35)^{1/2} B^4 D G$	+ $C_{27} 3 (35)^{1/2} B^4 (D^2 - G^2)$
+ $C_{28} 14 (10)^{1/2} B^4 D (D^2 - 3G^2)$	+ $C_{28} 14 (10)^{1/2} B^4 G (3D^2 - G^2)$
+ $C_{29} 2 (10)^{1/2} B^4 D (21F^2 + 7B^2 - 6)$	+ $C_{29} 2 (10)^{1/2} B^4 G (21F^2 + 7B^2 - 6)$
+ $C_{30} 2 (10)^{1/2} B^4 D (21F^2 + 7B^2 - 6)$	- $C_{30} 2 (10)^{1/2} B^4 G (21F^2 + 7B^2 - 6)$
+ $C_{31} 14 (10)^{1/2} B^4 D (D^2 - 3G^2)$	- $C_{31} 14 (10)^{1/2} B^4 G (3D^2 - G^2)$
+ $C_{32} 14 (10)^{1/2} B^4 G (3D^2 - G^2)$	+ $C_{32} 14 (10)^{1/2} B^4 D (D^2 - 3G^2)$
+ $C_{33} 2 (10)^{1/2} B^4 G (21F^2 + 7B^2 - 6)$	+ $C_{33} 2 (10)^{1/2} B^4 D (21F^2 + 7B^2 - 6)$
- $C_{34} 2 (10)^{1/2} B^4 G (21F^2 + 7B^2 - 6)$	+ $C_{34} 2 (10)^{1/2} B^4 D (21F^2 + 7B^2 - 6)$
- $C_{35} 14 (10)^{1/2} B^4 G (3D^2 - G^2)$	+ $C_{35} 14 (10)^{1/2} B^4 D (D^2 - 3G^2)$

$C'_{11} = C_{11} B^4$	$C'_{13} = C_{13} B^4$
+ $C_{16} (30)^{1/2} B^4 D$	+ $C_{16} (30)^{1/2} B^4 G$
+ $C_{17} (30)^{1/2} B^4 D$	- $C_{17} (30)^{1/2} B^4 G$
+ $C_{18} (30)^{1/2} B^4 G$	+ $C_{18} (30)^{1/2} B^4 D$
- $C_{19} (30)^{1/2} B^4 G$	+ $C_{19} (30)^{1/2} B^4 D$
+ $C_{22} 3 (35)^{1/2} B^4 (D^2 - G^2)$	+ $C_{22} 6 (35)^{1/2} B^4 D G$
+ $C_{23} (35)^{1/2} B^4 (6F^2 + B^2 - 1)$	+ $C_{23} 0$
+ $C_{24} 6 (70)^{1/2} B^4 D G$	+ $C_{24} 3 (70)^{1/2} B^4 (D^2 - G^2)$
+ $C_{25} 0$	+ $C_{25} (35)^{1/2} B^4 (6F^2 + B^2 - 1)$
- $C_{26} 6 (35)^{1/2} B^4 D G$	+ $C_{26} 3 (35)^{1/2} B^4 (D^2 - G^2)$
+ $C_{29} 14 (10)^{1/2} B^4 D (D^2 - 3G^2)$	+ $C_{29} 14 (10)^{1/2} B^4 G (3D^2 - G^2)$
+ $C_{30} 2 (10)^{1/2} B^4 D (21F^2 + 7B^2 - 6)$	+ $C_{30} 2 (10)^{1/2} B^4 G (21F^2 + 7B^2 - 6)$
+ $C_{31} 2 (10)^{1/2} B^4 D (14D^2 + 42G^2 + 7B^2 - 6)$	- $C_{31} 2 (10)^{1/2} B^4 G (28G^2 + 7B^2 - 6)$
+ $C_{32} 2 (10)^{1/2} B^4 G (42D^2 + 14G^2 + 7B^2 - 6)$	+ $C_{32} 2 (10)^{1/2} B^4 D (28D^2 + 7B^2 - 6)$
- $C_{33} 2 (10)^{1/2} B^4 G (21F^2 + 7B^2 - 6)$	+ $C_{33} 2 (10)^{1/2} B^4 D (21F^2 + 7B^2 - 6)$
- $C_{34} 14 (10)^{1/2} B^4 G (3D^2 - G^2)$	+ $C_{34} 14 (10)^{1/2} B^4 D (D^2 - 3G^2)$

$C'_{12} = C_{12} B^4$
+ $C_{17} 2 (15)^{1/2} B^4 G$
+ $C_{18} 2 (15)^{1/2} B^4 D$
+ $C_{23} 6 (70)^{1/2} B^4 D G$
+ $C_{24} (35)^{1/2} B^4 (6F^2 + B^2 - 1)$
+ $C_{25} 3 (70)^{1/2} B^4 (D^2 - G^2)$
+ $C_{30} 28 (5)^{1/2} B^4 G (3D^2 - G^2)$
+ $C_{31} 4 (5)^{1/2} B^4 G (21F^2 + 7B^2 - 6)$
+ $C_{32} 4 (5)^{1/2} B^4 D (21F^2 + 7B^2 - 6)$
+ $C_{33} 28 (5)^{1/2} B^4 D (D^2 - 3G^2)$

4. Aplicaciones

Para ejemplificar el uso de las fórmulas analíticas de transformación de coeficientes desarrolladas y utilizando el programa de computadora SLG07 implementado en base a dichas fórmulas¹⁷, en lo que sigue consideramos como se modifican al contraer y descentrar la pupila, las aberraciones de 2 sistemas¹⁸, la córnea de un sujeto T.O. con aberraciones severas y un sistema formador de imágenes arbitrario que originalmente solo tiene aberración esférica.

4.1 Aberraciones corneales de un sujeto T.O.

La aberración de la córnea sola y del ojo completo depende del sujeto, de la acomodación, de la excentricidad en retina, del tamaño pupilar, de torsiones oculares, etc. En lo que sigue consideramos el caso de la córnea de un sujeto T.O. con punto de fijación cercano y foveal. En los paneles superiores de la Figura 4 mostramos la topografía corneal y la pupila natural (izquierda) y la aberrometría corneal para pupila ficticia de diámetro 6 mm (o sea $a=3\text{mm}$) centrada en el eje queratométrico¹¹ (derecha) suministradas por el topógrafo SN CT1000. Para la condición de iluminación del topógrafo¹¹ (que es fotópica y origina una iluminancia en el ojo estudiado de (260 ± 20) lux), la pupila natural de T.O. tiene diámetro 3,30mm y está descentrada respecto del eje queratométrico de manera que

$$b = 1,65\text{mm} \qquad d = 0,10\text{mm} \qquad g = 0,28\text{mm} \qquad (6)$$

Los coeficientes originales, determinados con SN CT1000 respecto al eje queratométrico para $a=3\text{mm}$, y los nuevos, evaluados con SLG07, se representan en los 2 paneles inferiores de la Figura 4 (las escalas difieren en ambos gráficos). Las aberraciones dominantes de T.O. son los astigmatismos de 2^{do} orden y el trifolio $j=6$. Para la pupila ficticia de radio $a=3\text{mm}$ (panel izquierdo) se obtiene que el coeficiente de astigmatismo $j=5$ es aproximadamente $9\mu\text{m}$ y el de trifolio $j=6$ es $2\mu\text{m}$. Estos son valores altos pues, por ejemplo, según P. Artal¹⁰, midiendo las aberraciones oculares de un grupo de sujetos normales resulta que las aberraciones de orden superior son alrededor de $0,25\mu\text{m}$ para diámetro pupilar 5mm y algo mayores para 6mm. Sin embargo los coeficientes de orden mayor que el cuarto (es decir $j \geq 15$) son despreciables de manera que, como generalmente las aberraciones disminuyen si la pupila se contrae, los dejamos de lado al considerar la pupila natural. Considerando (panel derecho) una pupila de radio natural, es decir $b=1,65\text{mm}$, las aberraciones se reducen notablemente (Tabla II). Si el centro pupilar estuviese en el eje queratométrico ($D=G=0$) se tendría $C'_5|_{D=G=0} = -2,87\mu\text{m}$, $C'_3|_{D=G=0} = 0,45\mu\text{m}$ y $C'_6|_{D=G=0} = 0,36\mu\text{m}$ y, considerando el verdadero centro pupilar determinado con SN CT1000 (es decir $D=d/a=0,1/3=0,033\text{mm}$, $G=g/a=0,28/3=0,093\text{mm}$), las aberraciones disminuyen aún más. Esta aplicación es una muestra de las diferencias que aparecen en las aberraciones oculares evaluadas teniendo en cuenta pupilas naturales y artificiales (a menudo mayores y descentradas respecto de las naturales^{6,7}). Estas diferencias pueden ser importantes a la hora de estimar la calidad visual de sujetos durante tareas cotidianas.

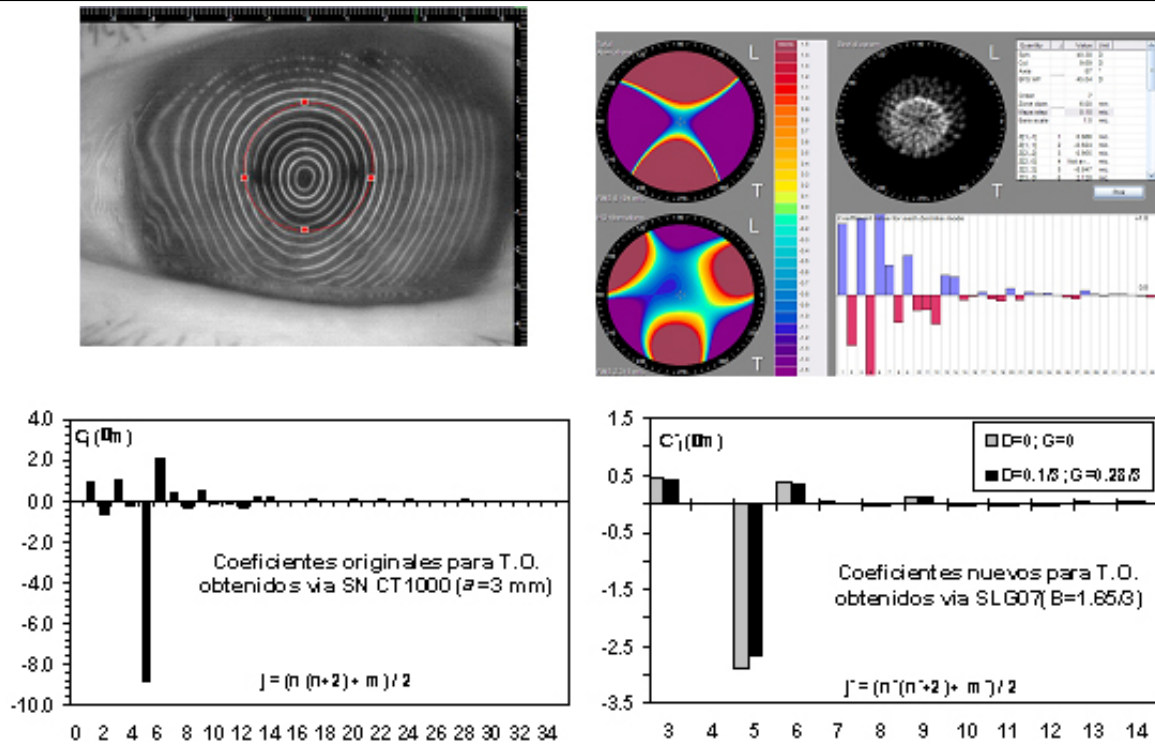


Figura 4. Paneles superiores: anillos de Placido y pupila (izquierda) y aberrometría para pupila de 6mm suministrada por el topógrafo SN CT1000 implementado por Gabriel Martin en Laboratorio Pfortner Corneal-ent-Argentina (derecha) Paneles inferiores Coeficientes originales (evaluados con SN CT1000) y nuevos (evaluados con SLG07) medidos respecto del centro de la pupila natural de T.O. para los casos $B=1,65/3=0,55, D=G=0$ y para $B=0,55, D=0.1/3$ y $G=0,28/3$

4.2 Variación con descentrado pupilar de aberraciones de un sistema que originalmente solo tiene aberración esférica de 4^{to} orden

Consideramos un sistema ficticio tal que, para la pupila original, solo hay aberración esférica de 4^o orden (es decir $C_j=0$ si $j \neq 12$) y, por ejemplo, suponemos (panel izquierdo de Figura 5):

$$C_{12} = 1 \mu m \quad B = 2/3 \quad F < 1/3 \quad (7)$$

Al modificar la pupila, la aberración esférica original ($j=12, n=4, m=0$), solo puede generar¹⁷ los modos nuevos $j'=12$ o $n' \leq 3$ sombreados en el panel derecho de la Figura 5. Si la pupila solo se contrae, hay pistón, desenfoque y aberración esférica de 4^o orden mientras que si, además, se desplaza hay también tilt, astigmatismo de 2^o orden y coma de 3^{er} orden. Los modos sombreados gris claro, o sea pistón, tilt y desenfoque, pueden compensarse mediante un simple desplazamiento o inclinación del plano imagen y, como usualmente carecen de interés, en lo que sigue solo consideramos los sombreados gris oscuro, es decir aberración esférica, astigmatismo y coma.

La aberración esférica nueva es independiente del descentrado pues solo depende de la contracción relativa B (Tabla II) y para el caso considerado aquí, $C'_{12} = 0,19 \mu m$, es decir es bastante menor que la original.

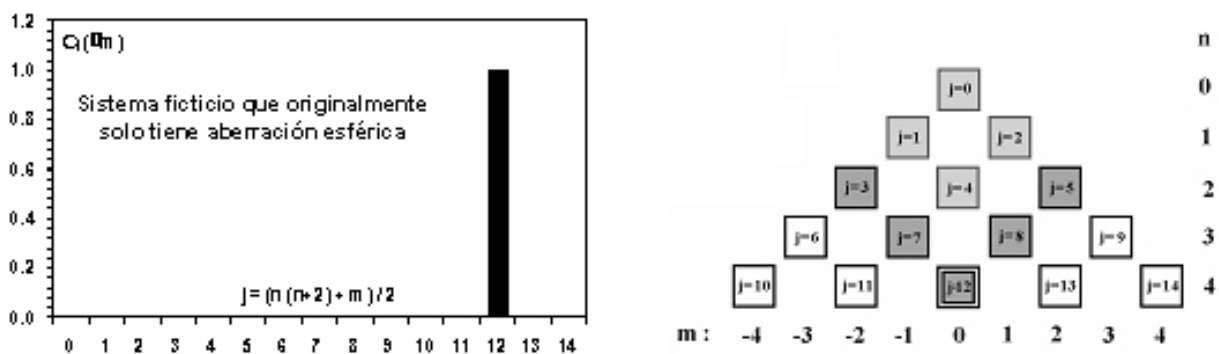


Figura 5. Sistema que originalmente solo tiene aberración esférica $j=12$. Panel izquierdo: aberrometría original. Panel derecho: aberraciones nuevas (sombreadas gris) que pueden ser generadas al contraer y/o descentrar la pupila.

En la Figura 6 graficamos la coma y el astigmatismo que aparecen (Tabla II) al descentrar la pupila contraída en una cantidad fija ($B=2/3$) en función de los desplazamientos relativos D ; G o F según corresponde a los casos $G=0$; $D=0$ y $D=G$ ($F=\pm(2)^{1/2}|D|$) respectivamente. Estas aberraciones aparecen para toda dirección de descentrado y se tiene

- un desplazamiento pupilar horizontal ($G=0$) origina astigmatismo $j'=5$ y coma $j'=8$ (arriba)
- un desplazamiento pupilar vertical ($D=0$) origina astigmatismo $j'=5$ y coma $j'=7$ (centro)
- un desplazamiento subtendiendo 45° con la vertical ($D=G$) origina $j'=3$, $j'=7$ y $j'=8$ (abajo)
- para otros valores de D y G no tenidos en cuenta en la Figura 6, hay otras contribuciones al astigmatismo y a la coma.

En general el astigmatismo total del sistema óptico es una superposición de los modos $j'=3$ y $j'=5$ mientras que la coma total es la superposición de los modos $j'=7$ y $j'=8$ siendo la magnitud de cada contribución dependiente de los valores de D y de G . Por ejemplo, si $D=0,33$ y $G=0$ resulta $C'_3=0$; $C'_5=0,53\mu\text{m}$; $C'_7=0$ y $C'_8=0,62\mu\text{m}$ (gráfico de arriba en Figura 6); si $D=0$ y $G=0,33$ se tiene $C'_3=0$; $C'_5=-0,53\mu\text{m}$; $C'_7=0,62\mu\text{m}$ y $C'_8=0$ (gráfico central en Figura 6) y si $D=G=0,23$ resulta $C'_3=0,53\mu\text{m}$; $C'_5=0$ y $C'_7=C'_8=0,44\mu\text{m}$ (gráfico de abajo en Figura 6).

Las condiciones originales aquí supuestas pueden aparecer, por ejemplo, en un sistema óptico compuesto por una lente biconvexa y un diafragma circular que está iluminado por un objeto pequeño axial. Si este sistema está centrado y se elige como plano imagen al de mejor enfoque, solo hay aberración esférica pero, como es bien sabido³, si el diafragma se desplaza lateralmente, aparece coma y astigmatismo, siendo el módulo del coeficiente de astigmatismo menor que el de coma para pequeños descentrados (Figura 6).

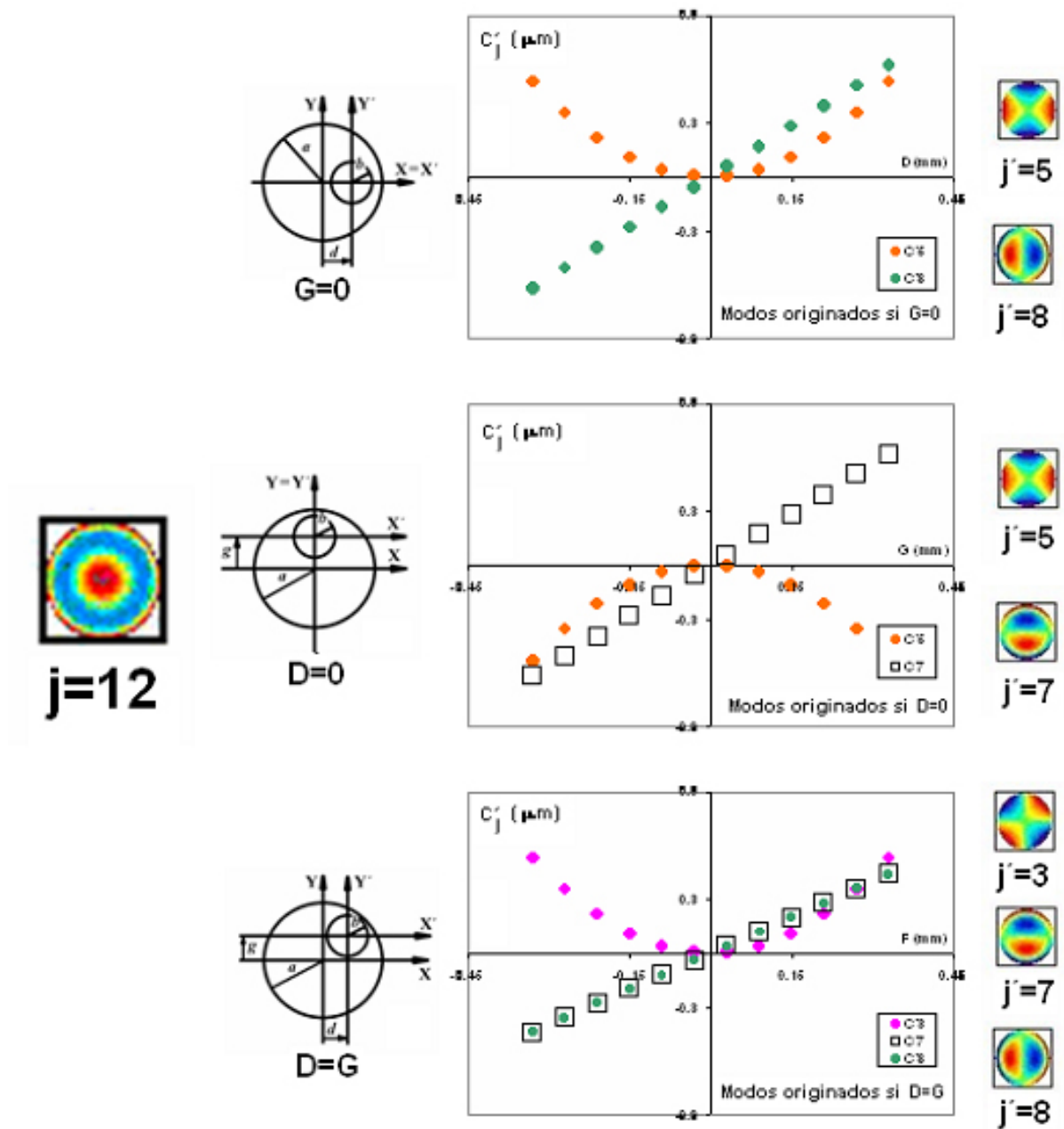


Figura 6. Variación de coeficientes Zernike correspondientes a astigmatismo (C_3' y C_5') y coma (C_7' y C_9') al descentrar la pupila en los casos $G=0$ (arriba), $D=0$ (centro) y $D=G$ (debajo) si $B=2/3$; $C_{12}=1\mu\text{m}$ y los otros coeficientes C_j son nulos

Comentarios finales

Desarrollando en modos Zernike la aberración del frente de ondas de sistemas ópticos y considerando nuestras fórmulas analíticas para transformar coeficientes Zernike de hasta 7º orden evaluados por trazado de rayos para una pupila original en coeficientes correspondientes a una pupila nueva contraída y descentrada, se han escrito explícitamente las fórmulas para coeficientes nuevos de hasta 4º orden. Adicionalmente, se han mostrado las aberrometrías originales y nuevas para 2 sistemas, la córnea de un sujeto con aberraciones severas de orden inferior al 4º y un sistema formador de imágenes que originalmente solo tiene aberración esférica de 4º orden. A partir de las diferencias entre las aberrometrías original y nueva, puede vislumbrarse la importancia, al evaluar la calidad de imágenes en condiciones reales, de disponer tanto de las fórmulas de transformación de coeficientes como de métodos que permitan determinar con razonable precisión el verdadero tamaño y centro de la pupila.

Agradecimientos

Se agradece a Gervasio Pérez y a Liliana I. Perez por su colaboración en la obtención de las fórmulas analíticas para los coeficientes; a Tomás Pfortner por suministrar las aberrometrías corneales originales y al Sr. Ezequiel Carbón por la realización de las figuras.

Bibliografía

1. S.A.Comastri, T.Pfortner y G.Martin, "Calidad visual: fundamentos físicos de los métodos actuales para diagnóstico y tratamiento de errores refractivos", Documento de Trabajo No **169**, Universidad de Belgrano http://www.ub.edu.ar/investigaciones/df_nuevos/169_comastri.pdf, **2007**
2. M. Born and B. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon, Oxford, 1987)
3. W. J. Smith, *Modern Optical engineering* (Mc Graw Hill, New York, 1966)
4. J. Liang and D. R. Williams, "Aberrations and retinal image quality of the normal human eye", *J. Opt. Soc. Am. A* **14**, 2873-2883 (1997)
5. A. Guirao, C. Gonzalez, M. Redondo, E. Geragbty, S. Norrby and P. Artal, "Average optical performance of the human eye as a function of age in a normal population", *Inv. Opt. and Vis. Sci.* **40**, 203-213 (1999)
6. S. Marcos, S. Barbero, L. Llorente and J. Merayo-Llives, "Optical response to myopic LASIK surgery from total and corneal aberration measurements", *Inv. Ophthalmol. Vis. Sci.* **42**, 3349-3356 (2001)
7. S. Barbero, S. Marcos, J. Merayo-Llives and E. Moreno Barriuso, "Validation of the Estimation of Corneal Aberrations From Videokeratography in Keratoconus", *J. Refract. Surg.* **18**, 263-269 (2002)
8. A. Guirao and P. Artal, "Corneal wave aberration from videokeratography: Accuracy and limitations of the procedure", *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 955-965 (2000)
9. L. N. Thibos, R. A. Applegate, H. C. Howland, D. R. Williams, P. Artal, R. Navarro, M. C. Campbell, J. E. Greivenkamp, J. T. Schwiegerling, S. A. Burns, D. A. Atchinson, G. Smith and E. J Sarver, "A VSIA-sponsored effort to develop methods and standards for the comparison of the wave-front aberration structure of the eye between devices and laboratories", *Vision Sciences and Its Applications* **1**, OSA Tech. Digest Series 236-239 (1999)
10. P. Artal, "Óptica adaptativa en el ojo: más allá de los límites de la visión", Conferencia Invitada en Meeting on Applied Optics, FIUBA-CIOP-Argentina, 29-30 Octubre 2007
11. S. A. Comastri, G. Martin and T. Pfortner, "Analysis of pupil and corneal wave aberration data supplied by the SN CT 1000 topography system", *Optik* **117**, 537-545 (2006)
12. S.A.Comastri, L.I.Perez, G.D.Pérez, G.Martin and K.Bastida, "Zernike expansion coefficients: rescaling and decentering for different pupils and evaluation of corneal aberrations", *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **9**, 209-221 (2007)
13. A. Guirao, D. R. Williams and I. G. Cox, "Effect of rotation and translation on the expected benefit of an ideal method to correct the eye's higher order aberrations", *J. Opt. Soc. Am. A* **18**, 1003-1015 (2001)
14. J. Schwiegerling, "Scaling Zernike expansion coefficients to different pupil sizes", *J. Opt. Soc. Am. A* **19**, 1937-1945 (2002)
15. C. E. Campbell, "Matrix method to find a new set of Zernike coefficients from an original set when the aperture radius is changed", *J. Opt. Soc. Am. A* **20**, 209-217 (2003)
16. S. Bara, J. Arines, J. Ares and P. Prado, "Direct transformation of Zernike eye aberration coefficients between scaled, rotated and/or displaced pupils", *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 2061-2066 (2006)
17. S.A.Comastri, Liliana I.Perez, Gervasio D.Pérez, Karina Bastida, and G. Martin, "Wavefront aberrations: analytical method to convert Zernike coefficients from a pupil to a scaled arbitrarily decentered one", 6th Iberoamerican Meeting on Optics and 9th Latin American Meeting of Optics, Lasers and their Applications, Campinas-Brasil 21-26 October 2007, Proceedings American Institute of Physics Volume **992** (en prensa, 2008)
18. K. Bastida, G. D. Pérez, G. Martin, S.A. Comastri, L. I. Perez, "Desarrollo de la aberración del frente de ondas en modos Zernike: transformación de coeficientes al contraer y trasladar la pupila", Comunicación Mural en Meeting on Applied Optics, FIUBA-CIOP-Argentina, 29-30 Octubre 2007
19. D.Huang, E.A. Swanser, C.P.Lin et al, "Optical Coherence tomography", *Science* **254**, 1178-1181 (1991)

